

QUANTENEFFEKTE IN STARKEN FELDERN

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)



seit 1558

vorgelegt dem Rat der Physikalischen-Astronomischen Fakultät
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Phys. Lars Rößler
geboren am 11.07.1984 in Altenburg

Gutachter

1. Prof. Dr Holger Gies (Friedrich-Schiller Universität Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut)
2. Prof. Dr. Carsten Müller (Heinrich Heine Universität Düsseldorf, Institut für theoretische Physik I)
3. Prof. Dr. Kurt Langfeld (Plymouth University, School of Computing and Mathematics)

Tag der Disputation: 13.05.2014

Danksagung

Mit der Fertigstellung der Dissertationsschrift möchte ich, noch einmal die Gelegenheit nutzen, den Menschen zu Danken, die mich auf diesem Weg begleitet haben. Zum einen ist dies mein Doktorvater Prof. Dr. Holger Gies, der mich über die Jahre hinweg betreut hat. Aber auch Dr. Felix Karbstein mit dem ich eine Vielzahl kritischer Diskussionen zu diesem Thema führen konnte. Ein weiterer Dank geht auch an die Carl-Zeiss Stiftung, die die Anfertigung dieser Arbeit durch finanzielle Unterstützung erst ermöglicht haben. Vor allem aber auch möchte ich meinen Eltern, sowie allen Freunden danken, die mich über die Zeit hinweg unterstützt haben.

Dieses Werk einschließlich seiner Teile ist **urheberrechtlich geschützt**. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Abstract

Ziel dieser Arbeit ist die Betrachtung von Quanteneffekten für Photonen in räumlich inhomogenen Feldern. Da die rein analytische Lösung der entsprechenden Gleichungen ein bis heute noch ungelöstes Problem darstellt, wird auf Basis des Weltlinienformalismus für skalare QED ein numerischer Algorithmus für Korrelationsfunktionen jenseits störungstheoretischer Ansätze entwickelt. In erster Linie wird dabei die 2-Punkt Photon Korrelationsfunktion, mit deren Hilfe Effekte wie Vakuumpolarisation oder Quantenreflexion betrachtet werden können, untersucht. Zur Verifikation der Numerik werden hierzu zunächst analytische Lösungen im konstanten Magnetfeld reproduziert. Für inhomogene Felder werden zum ersten Mal lokale Brechungsindizes des Quantenvakuums, jenseits der lokal konstanten Feldnäherung, berechnet. Dadurch wird ein neuer defokussierender Effekt von inhomogenen magnetischen Feldern sichtbar. Des Weiteren werden Näherungslösungen für den neuen Effekt der Quantenreflexion an inhomogenen Feldern durch die Numerik bestätigt. Ein weiterer Schritt ist die Erforschung von höherwertigen N -Punkt Korrelationsfunktionen, wie zum Beispiel der 3-Punkt Korrelationsfunktion, mit der der Effekt des Photonsplittings beschrieben wird. Erste Untersuchungen zeigen, dass das Adler-Theorem auch für inhomogene Felder noch näherungsweise Bestand hat.

This work is devoted to quantum effects for photons in spatially inhomogeneous fields. Since the purely analytical solution of the corresponding equations is an unsolved problem even today, a main aspect of this work is to use the worldline formalism for scalar QED to develop numerical algorithms for correlation functions beyond perturbative constructions. In a first step we take a look at the 2-Point photon correlation function, in order to understand effects like vacuum polarization or quantum reflection. For a benchmark test of the numerical algorithm we reproduce analytical results in a constant magnetic background. For inhomogeneous fields we calculate for the first time local refractive indices of the quantum vacuum. In this way we find a new de-focusing effect of inhomogeneous magnetic fields. Furthermore the numerical algorithm confirms analytical results for quantum reflection obtained within the local field approximation. In a second step we take a look at higher N -Point functions, with the help of our numerical algorithm. An interesting effect at the level of the 3-Point function is photon splitting. First investigations show that the Adler theorem remains also approximately valid for inhomogeneous fields.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Der Weltlinienformalismus	7
3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion	12
3.1. 2-Punkt Korrelationsfunktion im Weltlinienformalismus	13
3.2. Analytische Bestimmung der 2-Punkt Korrelationsfunktion	16
3.2.1. Der feldfreie Fall $eB = 0$	16
3.2.2. 2-Punkt Korrelationsfunktion im konstanten Magnetfeld $eB \neq 0$. .	19
3.2.3. Renormierung der 2-Punkt Korrelationsfunktion	23
3.3. Numerische Bestimmung der 2-Punkt Korrelationsfunktion	25
3.3.1. Stabilität des numerischen Algorithmus	29
3.3.2. Räumlich inhomogenes Magnetfeld in der Numerik	32
3.4. Phasengeschwindigkeit v_{ph} im räumlich oszillierenden Magnetfeld	36
3.5. Reflexion eines Photons im räumlich inhomogenen Magnetfeld	43
3.5.1. Bestimmung des Reflexionskoeffizient R	47
3.5.2. Numerische Fouriertransformation (FFT)	55
4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion	66
4.1. Analytische Betrachtung der 3-Punkt Korrelationsfunktion im konstanten Magnetfeld	68
4.1.1. 3-Punkt Korrelationsfunktion für kleine Eigenzeiten	75
4.2. Numerische Betrachtung der 3-Punkt Korrelationsfunktion	78
4.2.1. Bestimmung der dynamischen Grenze T_D	83
4.2.2. Optimierung des Parameterbereiches	85
4.2.3. 3-Punkt Korrelationsfunktion im räumlich inhomogenen Magnetfeld	89
5. Zusammenfassung	100
Literaturverzeichnis	102
Eidesstattliche Erklärung	109

Abbildungsverzeichnis	I
Tabellenverzeichnis	VII
Verzeichnis der Listings	VIII
A. Vektoren und Tensoren	i
B. Das Pfadintegral	iii
C. Greensche Funktion	vi
D. Experimentelle Ansätze	viii
D.1. PVLAS	x
D.2. POLARIS	xi
E. Die Numerische Arbeitsweise	xiii
E.1. Numerische Behandlung des Pfad- und Eigenzeitintegrals	xiii
E.2. Das nonlinear-least-squares Verfahren	xx

1. Einleitung

„I had a slogan. The vacuum is empty.
It weighs nothing because there's
nothing there.“

(Frank Wilczek)

Die Frage nach der Natur des Vakuums ist ein nicht leicht zu beantwortender Sachverhalt. In der klassischen Physik ist das Vakuum ein leerer Raum, in dem nichts existiert wie es in dem obigen Zitat dargestellt wird. Doch im Rahmen einer Quantenfeldtheorie wie die Quantenelektrodynamik (QED), ist das Vakuum keineswegs so uninteressant wie es zunächst den Eindruck macht. Das Auftreten von Nullpunktsenergien und Quantenfluktuationen in bestimmten Theorien zeigt, dass das Vakuum Eigenschaften besitzt, die genauer untersucht werden sollten. Vor allem bei Anwesenheit von starken elektromagnetischen Feldern zeigen sich interessante Effekte, wovon einige im Rahmen dieser Arbeit genauer untersucht werden. Der Anfang von solchen Untersuchungen liegt in einer von Heisenberg und Euler im Jahre 1936 veröffentlichten Arbeit [1], in der erstmals Quanteneffekte untersucht wurden, die auf die Wechselwirkung mit starken Feldern zurückgeführt werden können. Dabei bestimmten die Autoren ausgehend von Dirac's Theorie über das Positron und in Anlehnung an die Arbeit von Sauter [2], den nach ihnen benannten Heisenberg-Euler Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} L[\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, s]. \quad (1.1)$$

Die Eich- und Lorentzinvarianz der Theorie wird durch die Größen $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ sichtbar. Eine erste Erkenntnis dabei war, dass die Maxwell-Theorie durch nichtlineare Korrekturterme modifiziert wird, die die Selbstwechselwirkung des Photonfeldes beschreiben, insbesondere ist die Funktion L nicht-polynomial in den Feldstärke-Invarianten. Zudem kann es zur Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares im starken elektrischen Feld kommen, wie bereits zuvor von Sauter diskutiert wurde [2]. Auf soliden theoretischen Grundlagen entwickelte Schwinger 1951 eine Methode [3], die die geforderte Eichinvarianz manifest sicherstellt, und konnte damit die Resultate von Heisenberg und Euler reproduzieren. Ein weiterer Vorteil war, dass die von Schwinger in diesem Zusammenhang

1. Einleitung

eingeführte Eigenzeitmethode als Grundlage für viele weitere analytische Untersuchungen diene. Doch warum beschäftigte man sich zu einer Zeit, wo die Lasertechnik noch nicht entwickelt war, mit nichtlinearen Effekten [4; 5; 6] in starken Feldern bei Feldstärken im Bereich der kritischen Feldstärke E_C mit

$$E_C = \frac{m^2}{e} \simeq 1.3 \cdot 10^{18} \frac{V}{m},$$

welches der Feldstärke entspricht, bei der Energieskalen erreicht werden, die der Skala der Quantenfluktuationen, also der Comptonskala entsprechen. Neben dem grundsätzlich theoretischen Interesse können astrophysikalische Objekte ein Anwendungsgebiet darstellen. Denn in der Umgebung von Pulsaren oder Neutronensternen [7] treten solche Felder mit extremen Feldstärken in natürlicher Form auf. In den nachfolgenden Jahren wurden gerade im Bereich der Paarbildung viele weitere Arbeiten veröffentlicht, so unter anderem von Toll [8] oder anderen Autoren [9], die diesen Effekt in einem konstanten Magnetfeld untersuchten. Die Paarerzeugung in einem elektrischen Feld findet sich in [10], sowie weitere interessante Untersuchungen zu Effekten in starken Feldern in [11; 12]. Die Physiker Tsai und Erber studierten die Paarerzeugung ebenfalls mit Hilfe von expliziten Darstellungen des Vakuumpolarisationstensors [13], der auch in Arbeiten anderer Autoren untersucht wird [14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23]. Ein weiterer Ansatz zur Untersuchung von Paarerzeugung in Laserfeldern ist die Verwendung der Gordon-Volkov-Lösung [24; 25]. In diesem Zusammenhang bestimmten Tsai und Erber explizite Brechungsindizes $n_{\perp, \parallel}$ eines propagierenden Photons im konstanten Magnetfeld [26; 5; 27; 6; 28]. Im Bereich der Paarbildung lieferten die Autoren explizite Darstellungen der Absorptionskoeffizienten $\kappa_{\perp, \parallel}$ [13], die der inversen mittleren freien Weglänge eines Photons in einem starken Feld entsprechen. Dabei bezeichnet jeweils \perp und \parallel die Polarisation des Photons senkrecht oder parallel in der Ebene, die durch das Magnetfeld \vec{B} und die Ausbreitungsrichtung des Photons \vec{k} aufgespannt wird. Aber auch die Suche nach neuen Teilchen [29; 30; 31; 32; 33; 34] oder das Verständnis der nicht kommutativen Struktur der Raumzeit [35], motivierten in den vergangenen Jahren zu einer Betrachtung der Physik in starken Feldern. In den 90er Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurde dann, ausgehend von Bern und Kosower [36; 37] die einen alternativen Weg zur Berechnung von QCD-Streuamplituden suchten, sowie von Strassler [38] eine Methode entwickelt, die auch als Weltlinienformalismus bezeichnet wird. Dieser Formalismus soll als Grundlage für diese Arbeit dienen und im nachfolgenden Abschnitt explizit eingeführt werden. Viele weitere Arbeiten bauten in den darauf folgenden Jahren auf den Formalismus auf. Insbesondere Schmidt und Schubert zeigten, dass dieser Formalismus besonders effizient auf Korrelationsfunktionen in äußeren Feldern angewendet werden kann [39; 40; 41; 42; 43]. Es folgten eine Vielzahl von Anwendungen auf Prozesse in konstanten Feldern [39; 44; 45; 46; 47]. Ein Review findet sich in

1. Einleitung

[46]. Von Gies, Langfeld und weiteren Autoren [48; 49; 50; 51; 52; 53; 54] wurde auf Basis des Weltlinienformalismus eine numerische Methode entwickelt, womit sie unter anderem effektive Wirkungen und Quantenenergien numerisch bestimmen konnten. Mit der Weltliniennumerik war es möglich erstmals allgemeine inhomogene Felder zu untersuchen, was im Hinblick auf mögliche Experimente zunehmend relevant wird. Die Frage die sich nun stellt ist, in welcher Weise Feldinhomogenitäten die konkreten physikalischen Effekte beeinflussen oder neue Effekte verursachen. Diese Fragestellung motivierte zu dieser Arbeit, in der wir Korrelationsfunktionen in räumlich inhomogenen Magnetfeldern betrachten wollen. Hierzu verwenden wir analog zu den Arbeiten von Schubert [39; 44; 45; 46; 47] eine 1-Loop Näherung der effektiven Wirkung als erzeugendes Funktional, wobei wir uns zunächst auf den Fall der skalaren Quantenelektrodynamik (sQED) beschränken wollen. Im Rahmen dieser Theorie wird der Einfluss des Spins der Einfachheit halber vernachlässigt. Jedoch zeigte Schubert, dass ein direkter Zusammenhang zwischen den Gleichungen der vollständigen QED und sQED besteht, wobei diese durch einfache Ersetzungsregeln in der analytischen Rechnung ineinander überführt werden können. Ein weiterer Vorteil der sQED ist, dass die zusätzliche tensorwertige Struktur des Spins, nicht in den Gleichungen berücksichtigt werden muss. Verallgemeinerung der Weltliniennumerik auf spinorielle QED findet sich in [53; 51]. Grundsätzlich sind in den typischen Parameterbereichen lediglich geringere quantitative, jedoch keine qualitativen Unterschiede zwischen QED und sQED für die Photonkorrelatoren zu erwarten. Eine Ausnahme ist der extreme Starkfeldlimites, in dem das fermionische Fluktuationsspektrum eine Nullmode entwickeln kann, was zu qualitativen Unterschieden zwischen QED und sQED führen kann. In dieser Arbeit soll zunächst untersucht werden, ob eine numerische Bestimmung von Korrelationsfunktionen in räumlich inhomogenen Magnetfeldern mit Hilfe des Weltlinienformalismus überhaupt möglich ist. Um dies zu zeigen ist der erste Schritt dieser Arbeit, die Resultate von Schubert [45] auf Niveau der 2-Punkt Korrelationsfunktion in konstanten Feldern zu reproduzieren. Im Weiteren werden räumlich inhomogene Feldprofile untersucht. Dabei ist unter anderem die Observable der Phasengeschwindigkeit v_{ph} von Interesse [49; 55], die im Hintergrund eines räumlich oszillierenden Magnetfeldes betrachtet werden soll. Es wird sich in diesem Zusammenhang herausstellen, dass es zu einem neuartigen defokussierenden Effekt kommt [56], wenn die Oszillationsfrequenz des Feldes sich auf Skala der Comptonwellenlänge $\lambda_C = m^{-1}$ befindet. Dabei wurde $\hbar = c = 1$ gesetzt. Wird das oszillierende Feldprofil durch eine lorentzförmige Inhomogenität ersetzt, so ist es möglich den neuartigen Effekt der Reflexion eines Photons [57] an einen solchen Profil zu untersuchen (Quantenreflexion). Das Interessante an diesem Effekt ist, dass dieser nur in räumlich inhomogenen Feldern auftreten kann und bisher nur in einer lokal-konstanten Feldnäherung analytisch untersucht wurde. Die Observable, welche in diesem Zusammenhang bestimmt werden soll, ist der Reflexionskoeffizient $R_{\parallel,\perp}$, der wiederum von der Polarisationsrichtung

1. Einleitung

des einfallenden Photons abhängig ist. Es zeigt sich, dass die numerischen Rechnungen, die Ergebnisse der lokal-konstanten Näherung für den Fall eines parallel polarisierten Photons erstaunlich gut wiedergeben. Somit bestätigt die numerisch exakte Rechnung die Existenz des Effektes der Quantenreflexion jenseits der bisherigen Näherungsverfahren. Alle bisherig genannten Effekte konnten mit Hilfe des Polarisationsensors, das bedeutet auf Niveau der 2-Punkt Korrelationsfunktion, bestimmt werden. Zu einer ersten Betrachtung von höherwertigen Korrelationsfunktionen soll im Rahmen dieser Arbeit die 3-Punkt Korrelationsfunktion mit Anwendung auf Photonsplitting numerisch untersucht werden. Dabei stellt sich für uns die Frage, ob das Adler-Theorem [28], welches besagt, dass der Beitrag des Feynman-Diagramms niedrigster Ordnung (Boxdiagramm) zum Photonsplitting im Fall eines konstanten Magnetfeldes exakt verschwindet, auch im räumlich inhomogenen Magnetfeld noch Relevanz besitzt. Zunächst soll jedoch gezeigt werden, dass auch im Fall der 3-Punkt Korrelationsfunktion die analytischen Resultate [47] im konstanten Magnetfeld zuverlässig reproduziert werden können. Erste Rechnungen ergeben, dass das entsprechende Diagramm niedrigster Ordnung nicht exakt verschwindet, jedoch der Einfluss dieser Ordnung im untersuchten Parameterbereich dennoch stark unterdrückt ist. Außerdem werden die numerischen Ergebnisse in Hinblick auf die Berechnung von N -Punkt Korrelationsfunktionen diskutiert. Zur experimentellen Bestätigung der in dieser Arbeit betrachteten Effekte sind, wie schon am Anfang erwähnt, vergleichsweise große Feldstärken notwendig. Zur Messung der Vakuumdoppelbrechung existieren verschiedene Experimente, wie PVLAS [58; 59], Q & A [60] und BMV [61]. Dabei konnten unter anderem im PVLAS oder Q & A Experiment schon erste Daten gewonnen werden, die zeigen, dass die Sensitivität zur Zeit noch nicht ausreicht um QED Effekte zuverlässig nachzuweisen. Jedoch konnten schon Ausschlussgrenzen für neue Physik festgelegt werden. In der Zukunft möchte man mit neuen Experimenten, wie PVLAS 2 oder OSQAR [62] in bisher nicht zugängliche Messbereiche vordringen. Aktuell gibt es auch erste Ansätze Hochintensitätslaser, wie zum Beispiel POLARIS [63] zum Aufbau neuer Experimente zu verwenden, um Effekte in starken Laserfeldern [64; 65; 66; 67; 68; 69; 70] nachzuweisen. Mit der Helmholtz-Beamline beim European XFEL (DESY) ist es unter anderem das Ziel einen Starkfeldlaser mit einem im Bau befindlichen Röntgenlaser zu kombinieren, wie es von Wipf, Heinzl und Anderen [63] zur Messung der Doppelbrechung vorgeschlagen wurde. Der Parameterbereich, der in dieser Arbeit aus numerischen Gründen untersucht wird, liegt jedoch noch jenseits aktueller Experimente. Ein experimenteller Nachweis, zum Beispiel des defokussierenden Effektes, könnte aber möglicherweise in Zukunft auch mit Hilfe von höheren Harmonischen mit Hochintensitätslasern erfolgen.

2. Der Weltlinienformalismus

Die Motivation von Bern und Kosower [36; 37] einen alternativen Formalismus zu entwickeln ist vor allem das Ziel gewesen, QCD-Streuamplituden einfacher bestimmen zu können. Gerade im Fall einer n -Punkt Streuamplitude, müssen eine Vielzahl verschiedener Diagramme bestimmt werden, was mit wachsendem n ($n \in \mathbb{N}$) deutlich kompliziert und unhandlich werden kann. Vor allem der Aspekt, dass im Nachhinein bestimmte Anteile einer Vielzahl von Diagrammen aufgrund von geltenden Symmetrien entfallen, macht die bisherige Vorgehensweise bei höherwertigen Streuamplituden wenig effizient. Bern und Kosower konnten mit Hilfe der Stringtheorie, in der zur Bestimmung einer n -Punkt Streuamplitude nur die Berechnung eines einzigen Diagramms notwendig ist, zeigen, dass sich diese Vorgehensweise auch auf Probleme der QCD/QED anwenden lässt. Diese auch als Polyakov-Pfadintegrale bezeichneten Diagramme enthalten alle Diagramme der entsprechenden Eichtheorie. Die Regeln für den Übergang von der Stringtheorie zu einer Quantenfeldtheorie sind in [37] dargestellt. Ausgehend von den Rechnungen von Bern und Kosower konnte Strassler eine Verbindung zwischen Störungstheorie und den Bern-Kosower Regeln herstellen, ohne einen direkten Bezug zur Stringtheorie zu verwenden [38]. Dabei konnte er mit dieser Methode die effektive Wirkung $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$, störungstheoretisch ohne Verwendung von Feynman-Diagrammen bestimmen. Im Folgenden stellen wir kurz die Grundzüge des Weltlinienformalismus dar, wie sie in dieser Arbeit benötigt werden. Wir folgen der Darstellung in [71]. Ausgehend vom Schwinger Funktional $Z[J]$ mit

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int dx (\mathcal{L} + J\phi) \right),$$

wobei J einen Quellterm beschreibt und \mathcal{L} die Lagrangedichte der jeweiligen Theorie, lässt sich die effektive Wirkung $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ in einer 1-Loop Näherung bestimmen. Dabei ergibt sich für die Entwicklung bis zur Ordnung \hbar der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_{\text{cl}}] &\approx S[\phi_{\text{cl}}] + \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (S^{(2)}[\phi_{\text{cl}}])] \\ &\approx S[\phi_{\text{cl}}] + \Gamma^1[\phi_{\text{cl}}], \end{aligned}$$

wobei Γ^1 den 1-Loop-Beitrag zur effektiven Wirkung bezeichnet. Das klassische Feld ϕ_{cl} wird durch den Vakuumerwartungswert des Feldes ϕ beschrieben. Der für diese Arbeit

2. Der Weltlinienformalismus

entscheidende Entwicklungsterm, wird durch die quadratische Fluktuationsmatrix $S^{(2)}[\phi_{\text{cl}}]$ bestimmt:

$$S^{(2)}[\phi_{\text{cl}}] = \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi\delta\phi} \right|_{\phi_{\text{cl}}} . \quad (2.1)$$

Im Weltlinienformalismus wird Gleichung (2.1) auch als Weltlinienhamiltonian reinterpretiert, weshalb im Nachfolgenden $S^{(2)} \equiv H_W$ gelten soll. Im Fall einer Eichtheorie, wie der QED, kann die vorgenommene Entwicklung der effektiven Wirkung auch in Form von Feynman Diagrammen dargestellt werden. In Abbildung 2.1 ist die 1-Loop Nähe-

$$\Gamma[\phi] = \text{Diagramm 1} + 1/2 \text{ Diagramm 2} + 1/3 \text{ Diagramm 3} + \dots$$

Abbildung 2.1.: Darstellung der 1-Loop Näherung der effektiven Wirkung in Form von Feynman-Diagrammen für den Fall einer Eichtheorie [72].

rung [72] von $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ entsprechend diagrammatisch vorgenommen worden. Die externen Beinchen der einzelnen Diagramme sind Photonenlinien, die durch das Eichfeld A^μ repräsentiert werden, wobei der Loop einem Impulsintegral und der Spur nach $\int dp \text{Tr}_\gamma$ und die durchgezogene Linie einen Feynman-Propagator mit $\frac{1}{(\gamma_\mu p^\mu) - m}$ entspricht. Aufgrund der geltenden Symmetriebedingungen (Furry-Theorem) in der QED, verschwinden alle Diagramme mit einer ungeradzahligen Anzahl von äußeren Beinchen, weshalb in der obigen Abbildung 2.1 nur das zweite Diagramm erhalten bleibt. Innerhalb dieser Arbeit soll aber nicht die vollständige QED betrachtet werden, sondern aufgrund der Vernachlässigung der Spineigenschaften die skalare QED, deren Lagrangefunktion \mathcal{L} im Euklidischen über:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi \quad (2.2)$$

definiert ist. Das Feld wird dabei zum einem über den Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ mit dem Eichfeld $A^\mu = A^\mu(x)$, sowie über $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ in der entsprechenden Gleichung berücksichtigt. Doch zunächst soll der 1-Loop Korrekturterm $\Gamma^1[\phi_{\text{cl}}]$ zur effektiven Wirkung, etwas genauer untersucht werden. Mit Hilfe des Weltlinienhamiltonians H_W lässt sich dieser auch schreiben als:

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (H_W)] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-H_W T}. \end{aligned}$$

2. Der Weltlinienformalismus

Mit Hilfe des Frullani-Integrals konnte der Logarithmus entsprechend umgeschrieben werden, wobei eine feldunabhängige Konstante ignoriert wurde. Die verbleibende Spur

$$\mathrm{Tr} [e^{-H_W T}] = \int dx \langle x | e^{-H_W T} | x \rangle$$

kann als 4-dimensionale Integration eines Matrixelementes $\langle \dots \rangle$ im Ortsraum aufgefasst werden, was mit Hilfe der Zeitentwicklung in der Quantenmechanik (Anhang B) als Euklidisches Pfadintegral mit

$$\int d^D x \langle x | e^{-H_W T} | x \rangle = \mathcal{N} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \exp \left(\int_0^T d\tau L_W \right) \quad (2.3)$$

aufgefasst werden kann. Das Pfadintegral fordert, dass alle Pfade bei $x(0) = x(T) = x$ beginnen und enden. Im letzten Schritt wurde dabei eine Transformation der Zeitkoordinate $it = \tau$ vorgenommen, wobei nun entsprechend zu H_W die Weltlinienlagrangefunktion L_W eingeführt wurde. Bezogen auf den Fall der skalaren QED ergibt sich somit zunächst mit Hilfe von Gleichung (2.2) für den Korrekturterm zur effektiven Wirkung:

$$\Gamma^1 = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} [\ln (-D^2 + m^2)] .$$

Um aber nun diese Gleichung in eine Weltlinienform mit Hilfe des Pfadintegrals zu bringen, ist die Bestimmung von L_W aus Gleichung (2.2) notwendig. Hierzu soll der Ausdruck $(H_W \eta)(x)$ betrachtet werden, woraus sich aus der Lagrangefunktion \mathcal{L} von Gleichung (2.2) der Weltlinienhamiltonian mit

$$\begin{aligned} H_W \eta &= \int dy \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^*(x) \delta \phi(y)} \eta(y) \\ &= (- (\partial_x + ieA)^2 + m^2) \eta(x) \end{aligned}$$

ergibt. Das Feld η sei eine beliebige Testfunktion und spielt im Folgenden keine Rolle mehr. Über den aus der klassischen Mechanik bekannten Zusammenhang zwischen Hamilton- und Lagrangefunktion $H = p\dot{x} - L$, sowie der Ersetzung der Impulse p durch Geschwindigkeiten \dot{x} mit $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2(p + eA)$ folgt:

$$L_W = \frac{1}{4} \dot{x}^2 - ie\dot{x}A - m^2.$$

2. Der Weltlinienformalismus

Zu beachten ist, dass die Geschwindigkeiten $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$ definiert sind und somit in das entsprechende Euklidische Pfadintegral eingesetzt werden können. Für den Korrekturterm der effektiven Wirkung in der sQED ergibt sich:

$$\Gamma^1 = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \mathcal{N} \int dx_{\text{CM}} \int_{x(0)=x(T)}^{x_{\text{CM}}} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \left[\frac{1}{4} \dot{x}^2 + ieA\dot{x} \right] \right). \quad (2.4)$$

In Gleichung (2.4) wurde das eigentliche Pfadintegral in ein Integral über x_{CM} und ein weiteres Pfadintegral zerlegt, in dem die zu betrachtenden Pfade durch einen Punkt x_{CM} (*centre of mass*) fixiert sind. Für die entsprechenden Weltlinien gilt somit:

$$\int_0^T d\tau \, x(\tau) = 0.$$

Zur Bestimmung der Normierung \mathcal{N} wird anschließend der feldfreie Fall $A = 0$ betrachtet. Der entsprechende Hamiltonian H_W vereinfacht sich dabei zu $H_W = -\partial^2 + m^2$ und kann in den Korrekturterm $\Gamma^1[\phi_{\text{cl}}]$ zur effektiven Wirkung oder L_W in das entsprechende Euklidische Pfadintegral, eingesetzt werden. Ausgehend von Gleichung (2.3) folgt

$$\begin{aligned} -\text{Tr} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-(\partial^2 + m^2)T} &= - \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int dx \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} e^{-m^2 T} \\ &= -\mathcal{N} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int dx_{\text{CM}} \int \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + m^2 \right) \right), \end{aligned}$$

woraus sich für die Normierung

$$\mathcal{N} = \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} \left(\int \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} \right) \right) \right)^{-1} = \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} \tilde{\mathcal{N}}$$

ergibt. Für die Spur über $\exp(-\partial^2 T)$ ergibt sich bei einer expliziten Betrachtung im Impulsraum ein Gaußsches-Integral, welches den Term $\frac{1}{(4\pi T)^{D/2}}$ liefert. Gleichung (2.4) soll im Weiteren als erzeugendes Funktional für die gesuchten n -Punkt Korrelationsfunktionen dienen, wobei hierzu eine Entwicklung nach dem Eichfeld A_μ vorgenommen werden soll. Für die in dieser Arbeit betrachteten Systeme setzt sich dieses Feld genauer aus einem externen Feld $A_{\mu,\text{ext}}$, sowie einem propagierenden Photonenfeld a_μ , über $A_\mu = A_{\mu,\text{ext}} + a_\mu$,

2. Der Weltlinienformalismus

zusammen. Für die Bestimmung der n -Punkt Korrelationsfunktion aus dem erzeugenden Funktional ergibt sich somit:

$$\Pi_{nP}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\delta^n \Gamma^1}{\delta a_1^{\mu_1} \dots \delta a_n^{\mu_n}} \Big|_{a=0} \quad (a_i = a(x_i)).$$

Im nachfolgenden Abschnitt wird die Rechnung explizit am Beispiel der 2-Punkt Korrelationsfunktion durchgeführt.

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

Nachdem in den letzten Jahren im Bereich der Lasertechnik große Fortschritte erzielt worden sind, und bei aktuellen Laseranlagen in naher Zukunft Laserintensitäten um die $10^{23} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ erreicht werden könnten, spielen Effekte der nichtlinearen Quantenelektrodynamik (QED) eine immer größer werdende Rolle. So liegen auch in den hier zu betrachteten Fall der 2-Punkt Korrelationsfunktion die Anfänge bei den im Jahre 1936 von Heisenberg und Euler veröffentlichten Untersuchungen zu nichtlinearen Effekten innerhalb des Quantenvakuums bei starken externen Feldern [1] die zu dem bekannten Lagrangian nach Gleichung (1.1) führten. Diese analytischen Betrachtungen wurden im selben Jahr von Weisskopf [73] und später von Schwinger [3] weitergeführt. Dabei wurde von Klein und Nigam im Jahre 1964 [4], aufgrund einer virtuellen Paarerzeugung, die Möglichkeit von doppelbrechenden Eigenschaften des Vakuums erwähnt. Diese wurde im Nachhinein von Baier und Breitenlohner [5] genauer untersucht und dabei der Begriff der Vakuumdoppelbrechung geprägt. Im genaueren berechneten die Beiden zum ersten Mal Brechungsindizes mit Hilfe des Polarisationsensors in einer Schwachfeld-Näherung. Die relevante Größe des Absorptionskoeffizienten κ wird in diesem Zusammenhang durch den Imaginärteil der Lagrangedichte bestimmt. Viele der nachfolgenden theoretischen Untersuchungen basieren dabei auf den Gleichungen von Schwinger (1951), der mit Hilfe einer Eigenzeitmethode eine weitaus kompaktere Form der Gleichungen von Heisenberg und Euler herleiten konnte. In diesem Abschnitt ist der Vakuumpolarisationstensor $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ von zentraler Bedeutung, der für beliebige konstante elektromagnetische Hintergründe erstmals von Batalin und Shabad [14] 1971 explizit berechnet worden ist. Auf der Basis dieser analytischen Betrachtungen konnte gezeigt werden, dass das Quantenvakuum bei Feldstärken oder -intensitäten, bereits unterhalb der kritischen Intensität von $I_C = 10^{29} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ ein ähnliches optisches Verhalten wie zum Beispiel ein doppelbrechender Kristall (Kalkspat) aufweist. Dies kann auf die nichtlinearen Eigenschaften des Quantenvakuums in diesem Bereich zurückgeführt werden. Bei anisotropen Festkörpern, wie zum Beispiel das schon erwähnte Kalkspats, kommt es dazu, dass die beiden Polarisationsmoden unterschiedliche Brechungsindizes erfahren, was auf das Phänomen der Doppelbrechung führen kann. Es wird zwischen einem ordentlichen und außerordentlichen Fall unterschieden, wobei der ordentliche Fall dem bekannten snelliusschen Brechungsgesetz gehorcht [74], wohingegen der außerordentliche Fall an die Kristallstruktur gebunden ist. Die bisherigen

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

analytischen Untersuchungen bezüglich nichtlinearer Effekte im Quantenvakuum wurden auf Basis eines konstanten externen Hintergrundfeldes vollzogen. Die Untersuchung von räumlich und zeitlich veränderlichen Feldern ist bis heute auf rein analytischem Weg nur schwer möglich, weshalb die Weltliniennumerik in dieser Hinsicht einen neuen Zugang ermöglicht.

3.1. 2-Punkt Korrelationsfunktion im Weltlinienformalismus

Als Ausgangsgleichung zur Bestimmung der 2-Punkt Funktion im Rahmen des Weltlinienformalismus für skalaren Quantenelektrodynamik, die auf den euklidischen Lagrangian (2.2) zurückgeht, wird die effektive Wirkung in erster Ordnung (1-Loop Näherung in den Quantenfluktuationen der geladenen Skalare):

$$\Gamma^1 = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \mathcal{N} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x}A \right\} \right) \quad (3.1)$$

verwendet. In dieser Gleichung bezeichnet T den Eigenzeitparameter und $x = x(\tau)$ eine zeitabhängige Weltlinienkoordinate. Das Pfadintegral wird über alle möglichen geschlossenen Pfade oder auch Weltlinien gebildet, wobei die Koordinaten in einem Zeitbereich $\tau \in [0, T]$ betrachtet werden. Mit \mathcal{N} ist die Normierung des Pfadintegrals, die in den vorangegangenen Abschnitt bestimmt worden ist, bezeichnet. Das Eichfeld $A^\mu(x)$ trägt dabei die vollständige Information des vorhandenen elektromagnetischen Feldes. Als erstes Beispiel betrachten wir die 2-Punkt Korrelationsfunktion im feldfreien Fall bei $A^\mu = 0$. Zur Bestimmung der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$, im Grenzfall eines verschwindenden Hintergrundfeldes, wird die Gleichung (3.1), die als erzeugendes Funktional für die gesuchten Korrelationsfunktionen dient, zweimal nach dem Eichpotential,

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu} = \left. \frac{\delta^2 \Gamma^1}{\delta A^\mu(x_1) \delta A^\nu(x_2)} \right|_{A=0},$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

ausgewertet an den Punkten $x_i = x(\tau_i)$ mit $i = 1, 2$ funktional an der Stelle $A = 0$ abgeleitet. Eine Ausführung der funktionalen Ableitung führt auf:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{2P}^{\mu\nu}[x_1, x_2] &= \left. \frac{\delta^2 \Gamma^1}{\delta A^\mu(x_1) \delta A^\nu(x_2)} \right|_{A=0} \\
 &= \frac{\delta^2}{\delta A^\mu(x_1) \delta A^\nu(x_2)} \left(\int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \right. \\
 &\quad \times \mathcal{N} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x}A \right\} \right) \Bigg|_{A=0} \\
 &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\
 &\quad \times \mathcal{N} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \left(\dot{x}_1^\mu \delta^D(x - x_1) \dot{x}_2^\nu \delta^D(x - x_2) \right) \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right) \quad (3.2) \\
 &= \int_0^\infty dT \delta \Pi_{2P}^{\mu\nu},
 \end{aligned}$$

was einer Darstellung der 2-Punkt Funktion im Ortsraum entspricht. Eine genauere Betrachtung des Pfadintegrals zeigt, dass jede Deltafunktion $\delta^D(x - x_i)$ das Ensemble an einem zusätzlichen Punkt x_i fixiert. Genauer bedeutet dies, dass an dieser Stelle anstatt aller geschlossenen Pfade zwei Teilpfade betrachtet werden, die zwischen den Punkten $x(0)$ nach x_i und x_i nach $x(T)$ verlaufen und in der Gesamtheit wieder geschlossen sind. Für die rein analytische Betrachtung in einem konstanten Feld ist diese Tatsache kein Problem, jedoch zeigt sich, dass sich in der späteren numerischen Umsetzung Schwierigkeiten mit der Normierung \mathcal{N} ergeben. Die Normierung \mathcal{N} wird dadurch fixiert, dass der Eigenzeitintegrand im Limes $A \rightarrow 0$ (Abschnitt 2) dem Standard heat-kernel eines freies komplexen Skalarfeldes entspricht:

$$\Gamma^1 = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \frac{\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x}A \right\} \right)}{\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right)}.$$

Als heat-kernel wird die Spur des Entwicklungsoperators in der Eigenzeiten T bezeichnet. Für die Konstruktion eines Algorithmus für die 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ stellt die Normierung insofern ein praktisches Problem dar, da in der obigen Ortsraum Formulierung zwei unterschiedliche Weltlinienensemble zur Bestimmung der Pfadintegrale notwendig sind.

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

Im genaueren bedeutet dies offene Pfade für die Observable und geschlossene Pfade für die Normierung. Um diese Problematik zu vermeiden, bietet es sich an mit Hilfe einer Fouriertransformation gemäß:

$$\delta^D(x - x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} d^D k_i e^{-ik_i(x-x_i)}$$

die Deltafunktionen zu vermeiden und die weitere Betrachtung im Impulsraum durchzuführen. Aus der Gleichung $\Pi_{2P}^{\mu\nu}[x_1, x_2]$ für die 2-Punkt Funktion folgt somit:

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu}[x_1, x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} d^D k_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^D k_2 \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2] e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2}$$

ein Ausdruck $\Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2]$ in der neuen Darstellung. Dieser lässt sich numerisch besser auswerten, da in dem Ausdruck zunächst keine raumzeitliche Fixierung der Weltlinien gefordert wird. Es ergibt sich somit die Darstellung im Impulsraum, in der der Faktor $(4\pi T)^{D/2}$ aus der Normierung \mathcal{N} herausgezogen wurde:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2] &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \left(\dot{x}_1^\mu e^{-ik_1(x-x_1)} \dot{x}_2^\nu e^{-ik_2(x-x_2)} \right) \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right) \\ &= (-ie)^2 \int_{-\infty}^\infty d^D x e^{-i(k_1+k_2)x} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \left(\dot{x}_1^\mu e^{ik_1 x_1} \dot{x}_2^\nu e^{ik_2 x_2} \right) \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right) \\ &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \left(\dot{x}_1^\mu e^{ik_1 x_1} \dot{x}_2^\nu e^{ik_2 x_2} \right) \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei wurde in den Gleichungen die verbleibende Normierung $\tilde{\mathcal{N}}$, die in den vorangegangenen Abschnitt bestimmt worden ist, nicht mehr explizit angegeben, sie muss jedoch nach wie vor berücksichtigt werden. In Abbildung 3.1 ist die 2-Punkt Korrelationsfunktion

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

$\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ als Feynman Diagramm dargestellt. Um sicherzustellen dass innerhalb der Gleichung

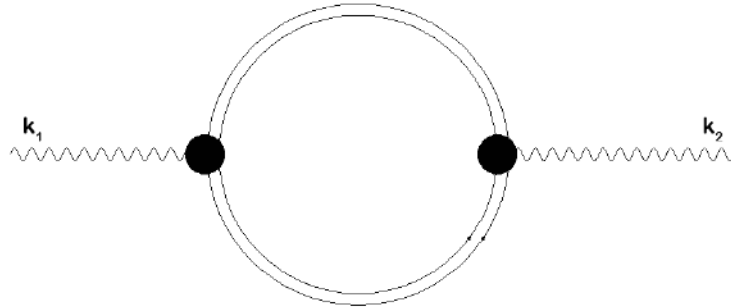


Abbildung 3.1.: Darstellung der 2-Punkt Korrelationsfunktion als Feynman Diagramm. Die äußeren Beinen repräsentieren die Photonenlinien, die durch die Eichfelder $A_{1,2}^\mu$ beschrieben werden. Der Loop stellt eine Integration über den internen Impuls des Feynman-Propagators dar. Die Doppellinien symbolisiert das Vorhandensein eines externen Feldes, das bedeutet den Fall $eB \neq 0$. In der sQED trägt noch ein weiteres tadpole-artiges Diagramm zu $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ bei, das im Weltlinienformalismus automatisch berücksichtigt wird.

(3.3) die Nullmode des Laplace-Operators berücksichtigt wird, ist im Pfadintegral die Integration über die Schwerpunktkoordinate x_{CM} herausgezogen worden, was dazu führt, dass das gesamte Weltlinienensemble an einem Schwerpunkt x_{CM} (center of mass) fixiert ist. Da der Punkt, der die Translations-Nullmode parametrisiert, jedoch im Gegensatz zu Gleichung (3.2) nicht eindeutig ist, kann statt des Schwerpunktes x_{CM} auch eine beliebige andere Fixierung gewählt werden, zum Beispiel $x_{\text{cp}} = x(0) = x(T)$ (comman-point Fixierung). In jedem Fall wird in der Impulsraumformulierung über geschlossene Pfade integriert, womit für die Observable das gleiche Ensemble wie in der Normierung verwendet werden kann.

3.2. Analytische Bestimmung der 2-Punkt Korrelationsfunktion

3.2.1. Der feldfreie Fall $eB = 0$

Die 2-Punkt Funktion aus Gleichung (3.3) wurde im Rahmen des Weltlinienformalismus erstmals durch Schubert [44; 45; 19] in einem konstanten Magnetfeld betrachtet. Zum besseren Verständnis der Vorgehensweise ist es aber von Vorteil, zunächst den feldfreien Fall zu behandeln. Hierbei soll die Korrelationsfunktion im Impulsraum als Ausgangspunkt

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

dienen. Schubert zeigte, dass sich das Pfadintegral durch die Methode der quadratischen Ergänzung lösen lässt, wenn für:

$$\dot{x}_j^\mu e^{ik_j x_j} = \exp(\dot{x}_j \epsilon_j + ik_j x_j) \Big|_{lin(\epsilon_j)}$$

geschrieben wird. Dabei weist der Ausdruck $lin(\epsilon_j)$ darauf hin, dass bei der weiteren Auswertung nur Faktoren der Entwicklung der Exponentialfunktion berücksichtigt werden müssen, die linear in allen ϵ_j sind. Bei den Vektoren ϵ_j handelt es sich um die Polarisationsvektoren der einzelnen Photonen, die die Struktur $\epsilon_j = (\vec{\epsilon}_j, 0)$ besitzen. Wird diese Vorgehensweise auf Gleichung (3.3) angewendet folgt:

$$\Pi_{2P}[k_1, k_2]^{\mu\nu} \sim \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \exp \left(\sum_{j=1}^2 \dot{x}_j \epsilon_j + ik_j x_j - \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right) \Big|_{lin(\epsilon_j)}.$$

Wir verwenden hier das \sim Symbol, um uns auf den Weltlinieninhalt der Ausdrücke zu konzentrieren. Später werden aber alle Vorfaktoren und so weiter wieder berücksichtigt. Hier kann nun das Verfahren der quadratischen Ergänzung angewendet werden, was auf

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2] &\sim \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{1}{4} \left\{ \dot{x}^2 - 4 \sum_{j=1}^2 \dot{x}_j \epsilon_j - 4i \sum_{j=1}^2 k_j x_j \right\} \right) \Big|_{lin(\epsilon_j)} \\ &\sim \exp \left(\sum_{i,j=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} G_{B_{ij}} k_i k_j + i \dot{G}_{B_{ij}} k_i \epsilon_j + \frac{1}{2} \ddot{G}_{B_{ij}} \epsilon_i \epsilon_j \right\} \right) \Big|_{lin(\epsilon_j)} \\ &\sim \exp \left(\sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} G_{B_{ij}} k_i k_j \right) \left(\ddot{G}_{B_{12}} g^{\mu\nu} + \dot{G}_{B_{12}}^2 k_1^\nu k_2^\mu \right) \end{aligned}$$

führt. Dabei wurde im letzten Schritt von der Bedingung Gebrauch gemacht, dass nur die Entwicklungsterme berücksichtigt werden müssen, die sowohl ϵ_1 als auch ϵ_2 beinhalten. Die Funktionen $G_{B_{ij}}$ werden als [feldfreie Greenschen Funktionen](#) bezeichnet [38] und ergeben sich aus dem Pfadintegral zu

$$-g^{\mu\nu} G_{B_{ij}} = \langle x_i^\mu x_j^\nu \rangle = \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x x_i^\mu x_j^\nu \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right)$$

mit

$$G_{B_{ij}} = |\tau_i - \tau_j| - \frac{(\tau_i - \tau_j)^2}{T} \quad (3.4)$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

und der Eigenzeit T . Die zugehörigen Ableitungen der Greenschen Funktion $\dot{G}_{B_{ij}}$ berechnen sich zu $\dot{G}_{B_{ij}} = \partial_{\tau_i} G_{B_{ij}}$, wobei die Ableitung immer nach dem ersten Index gebildet wird. Die gezeigte Vorgehensweise zur analytischen Lösung der 2-Punkt Funktion kann auch auf höherwertige Korrelationsfunktionen angewendet werden. Dabei ergibt sich für die N -Punkt Korrelationsfunktion im Impulsraum der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi_{NP}^{\mu_1 \dots \mu_N}[k_1, \dots, k_N] = & (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \dots \int_0^T d\tau_N \delta^D(k_1 + \dots + k_N) \\ & \times \exp \left(\sum_{i,j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} G_{B_{ij}} k_i k_j + i \dot{G}_{B_{ij}} k_i \epsilon_j + \frac{1}{2} \ddot{G}_{B_{ij}} \epsilon_i \epsilon_j \right\} \right) \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

der für die 2-Punkt Funktion von Schubert [45] explizit betrachtet worden ist. Es zeigt sich später, dass in Anwesenheit eines externen Magnetfeldes die Form der Gleichung (3.5) bestehen bleibt, jedoch die Greenschen Funktionen, die im feldfreien Fall einen skalaren Charakter aufweisen, zu tensorwertigen Funktionen werden. Zunächst soll aber die analytische Gleichung für die 2-Punkt Funktion noch explizit gelöst werden, indem alle zweiten Ableitungen der Greenschen Funktion mittels partielle Integration nach τ_1 aus der Gleichung entfernt werden (**rot**). Dies führt auf:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2] = & (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \delta^D(k_1 + k_2) \\ & \times \exp(G_{B_{12}} k_1 k_2) \dot{G}_{B_{12}}^2 (-k_1 k_2 \delta^{\nu\mu} + k_1^\nu k_2^\mu) \end{aligned}$$

Im Exponenten bleiben von der Summe nur die beiden Summanden mit $G_{B_{12}}$ übrig, da die Greenschen Funktionen $G_{B_{jj}}$ verschwinden. Bei den Photonenvektoren k_j handelt es sich um minkowskiwertige Größen, die die on-shell Bedingung $k_j^2 = 0$ erfüllen können, jedoch ist dies innerhalb der Gleichung keine notwendige Forderung. Es ist vielmehr möglich auch off-shell Photonen ($k_j^2 \neq 0$) zu betrachten. Die Weltlinienkoordinaten x^μ sollen hingegen als euklidische Vektoren behandelt werden. Außerdem wurden die Symmetrieeigenschaften der Greenschen Funktion ausgenutzt:

- $G_{B_{ij}} = G_{B_{ji}}$, symmetrisch unter Vertauschung der Eigenzeitindizes,
- $\dot{G}_{B_{ij}} = -\dot{G}_{B_{ji}}$, antisymmetrisch unter Vertauschung der Eigenzeitindizes.

Zur weiteren Vereinfachung der analytischen Gleichung, kann von der Tatsache Gebrauch gemacht werden, dass durch Fixierung des Weltlinienensembles an den Massenschwerpunkt eine Deltafunktion $\delta^D(k_1 + \dots + k_N)$ entstanden ist, die in physikalischer Hinsicht

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

für den betrachteten Fall Energie- und Impulserhaltung fordert. Somit gilt für die 2-Punkt Funktion der Erhaltungssatz $k_1 + k_2 = 0$, woraus $k_1 = -k_2 = k$ folgt. Dessen Anwendung führt auf:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2] &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\quad \times \exp(-G_{B_{12}} k^2) \dot{G}_{B_{12}}^2 (k^2 \delta^{\mu\nu} - k^\nu k^\mu) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist es noch möglich, die Eigenzeitintegrale explizit zu lösen. Hierzu kann die Substitution $v = T(\tau_1 - \tau_2)$ durchgeführt werden, wobei eine der beiden Eigenzeitkoordinaten aufgrund der Symmetrie fixiert wird. Die resultierende Form:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2] &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^1 dv \\ &\quad \times \exp(-Tv(1-v)k^2) T^2(1-2v)^2 (k^2 \delta^{\mu\nu} - k^\nu k^\mu) \end{aligned} \quad (3.6)$$

des Korrelators im feldfreien Fall, kann nun dazu verwendet werden, um erste numerische Testrechnungen durchzuführen. Es geht in erster Linie darum zu zeigen, ob eine numerische Behandlung der 2-Punkt Funktion im Rahmen des Weltlinienformalismus überhaupt möglich ist [56].

3.2.2. 2-Punkt Korrelationsfunktion im konstanten Magnetfeld

$$eB \neq 0$$

Im Gegensatz zur vorangegangenen Betrachtung im feldfreien Fall gestaltet sich die Lösung unter Berücksichtigung eines konstanten Magnetfeldes weitaus komplizierter. Der Vorteil der Weltliniennumerik ist jedoch zunächst einmal, dass im Gegensatz zur Rechnung von Schwinger [3] und anderen Autoren keine expliziten Einschränkungen an das angelegte Feld gestellt werden müssen, sondern beliebige Feldprofile betrachtet werden können. Das externe Feld selbst wird in Gleichung (3.1) über

$$A^\mu = a^\mu + A_{\text{ext}}^\mu$$

berücksichtigt, wobei a^μ das Eichpotential von Strahlungsphotonen wie im Fall eines verschwindenden Hintergrundfeldes darstellt und A_{ext}^μ die Informationen des externen Feldes

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

trägt. Für ein konstantes Magnetfeld, welches in $e_3(z)$ -Richtung zeigt, ergibt sich als eine Mögliche Wahl für das Eichpotential des externen Feldes:

$$A_{\text{ext}}^\mu = \left(0, -\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0 \right)^T = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}x_\nu.$$

Als Ausgangsgleichung zur Bestimmung der 2-Punkt Funktion erhält man auf diese Weise:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\times \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \left(\dot{x}_1^\mu e^{ik_1 x_1} \dot{x}_2^\nu e^{ik_2 x_2} \right) \exp \left(- \int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + i\frac{1}{2}\dot{x} F x \right] \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

nach Erweiterung der Gleichung (3.1) durch die entsprechenden Eichpotentiale A_{ext}^μ und anschließenden zweifachen funktionellen Ableitung nach a^μ im Impulsraum. Hier und im Folgenden gilt $A_{\text{ext}} \equiv A$. Gerade an dieser Stelle ist leicht zu erkennen, dass das externe Feld (**rot**) ohne Einschränkungen in die einzelnen Korrelationsfunktionen eingeht und keine Näherungen notwendig sind. Die eigentlichen Gleichungen lassen sich jedoch nur im Fall eines konstanten Hintergrundfeldes exakt analytisch lösen, weshalb wir uns zunächst darauf beschränken wollen. Im Weiteren wird in analoger Weise zum feldfreien Fall vorgegangen, was auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi_N^{\mu_1 \dots \mu_N}[k_1, \dots, k_N|A] &= (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \dots \int_0^T d\tau_N \delta^D(k_1 + \dots + k_N) \\ &\times \exp \left(\sum_{i,j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} k_i \mathcal{G}_{B_{ij}} k_j + i k_i \dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} \epsilon_j + \frac{1}{2} \epsilon_i \ddot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} \epsilon_j \right\} \right) \Bigg|_{\text{lin}(\epsilon_j)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

für die N -Punkt Korrelationsfunktion führt. Dabei wird die skalare Greensche Funktion $G_{B_{ij}}$ durch die feldabhängige Funktion $\mathcal{G}_{B_{ij}}$ ersetzt. Bei dieser Greenschen Funktion handelt es sich um eine tensorwertige Größe, weshalb in Gleichung (3.8) die einzelnen Vektoren (**blau**) nicht beliebig in ihrer Abfolge verändert werden können. Eine genauere Betrachtung der Symmetrie der Greenschen Funktionen zeigt:

- $\mathcal{G}_{B_{ij}}^{\mu\nu} = \mathcal{G}_{B_{ji}}^{\nu\mu}$ ist symmetrisch unter Vertauschung der Lorentz- sowie Eigenzeitindizes,
- $\dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}}^{\mu\nu} = -\dot{\mathcal{G}}_{B_{ji}}^{\nu\mu}$ ist antisymmetrisch unter Vertauschung der Lorentz- sowie Eigenzeitindizes.

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

Die Greensche Funktion selbst hängt ab vom Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, sowie der bosonischen Greenschen Funktion $\dot{G}_{B_{ij}}$ aus Gleichung (3.4):

$$\mathcal{G}_{B_{ij}} = \frac{T}{2\mathcal{Z}} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\sin \mathcal{Z}} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B_{ij}}} + i\mathcal{Z}\dot{G}_{B_{ij}} - 1 \right).$$

Zur weiteren Betrachtung der 2-Punkt Funktion schlug Schubert eine Zerlegung der Greenschen Funktion in einen geraden (**rot**) und ungeraden (**blau**) Anteil [45] in der Koordinate $z = eBT$ vor:

$$\mathcal{G}_{B_{ij}} = \mathcal{S}_{B_{ij}}[z] + \mathcal{A}_{B_{ij}}[z]. \quad (3.9)$$

Der Grundgedanke bei dieser Vorgehensweise ist, dass eine Integration über ein Produkt gerader und ungerader Funktion null ergibt, womit sich das Integral aus Gleichung (3.8) deutlich vereinfachen lässt. Doch zunächst soll die Gleichung (3.8) für $N = 2$ analog zum feldfreien Fall ausgewertet werden, was auf

$$\begin{aligned} \Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] &\sim \exp \left(\sum_{i,j=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} k_i \mathcal{G}_{B_{ij}} k_j + i k_i \dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} \epsilon_j + \frac{1}{2} \epsilon_i \ddot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} \epsilon_j \right\} \right) \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)} \\ &\sim \exp(k_1 \bar{\mathcal{G}}_{B_{12}} k_2) \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B_{12}}^{\mu\nu} - \sum_{i,j=1}^2 (\dot{\mathcal{G}}_{B_{1i}} k_i)^\mu (\dot{\mathcal{G}}_{B_{2j}} k_j)^\nu \right) \\ &\sim \exp(k_1 \bar{\mathcal{G}}_{B_{12}} k_2) \left(- \sum_{i=1}^2 \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}^{\mu\nu} k_1 \dot{\mathcal{G}}_{B_{1i}} k_i - \sum_{i,j=1}^2 (\dot{\mathcal{G}}_{B_{1i}} k_i)^\mu (\dot{\mathcal{G}}_{B_{2j}} k_j)^\nu \right) \end{aligned}$$

führt. Hierbei kann im Exponenten aufgrund der geltenden Energie- und Impulserhaltung mit $k_1 + k_2 = 0$ (Translationsinvarianz) die Summe zu $\bar{\mathcal{G}}_{B_{12}} = \mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}}$ (analog mit $\mathcal{G}_{B_{22}}$) zusammengefasst werden. Anschließend wird die Funktion $\ddot{\mathcal{G}}_{B_{12}}$ durch partielle Integration nach τ_1 eliminiert, womit im resultierenden Ausdruck nun die Zerlegung der einzelnen Greenschen Funktionen nach Gleichung (3.9) erfolgen kann. Die Anwendung von $k = k_1 = -k_2$ führt auf:

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2 A] \sim \exp(-k \bar{\mathcal{G}}_{B_{12}} k) \left(\dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} k - \sum_{i,j=1}^2 (\dot{\mathcal{G}}_{B_{1i}} k - \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} k)^\mu (-\dot{\mathcal{G}}_{B_{22}} k + \dot{\mathcal{G}}_{B_{21}} k)^\nu \right)$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

Unter Berücksichtigung der Ward-Identität $\Pi^{\mu\nu}k_\nu = 0$, sowie der schon erwähnten Symmetriebedingungen der Greenschen Funktionen folgt daraus [45]:

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2 A] = (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 I^{\mu\nu} \exp(-Tk\phi_{12}k), \quad (3.10)$$

$$I^{\mu\nu} = \left(\dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{S}_{B_{12}} k - (\dot{S}_{B_{12}} k)^\mu (\dot{S}_{B_{12}} k)^\nu - \sum_{i,j=1}^2 (\dot{A}_{B_{11}} k - \dot{A}_{B_{12}} k)^\mu (-\dot{A}_{B_{22}} k + \dot{A}_{B_{21}} k)^\nu \right).$$

Dies ist die analytische Lösung für die 2-Punkt Korrelationsfunktion in einem konstanten Magnetfeld. Zu beachten ist, dass wir uns bei den einzelnen Gleichungen, nach wie vor auf eine skalare Theorie (sQED), ohne Berücksichtigung des Spins beschränken. Bern und Kosower [37] haben in diesem Zusammenhang Ersetzungsregeln entwickelt, um von der skalaren Formulierung zu den Gleichungen der vollständigen QED zu gelangen. Hierzu ist es notwendig die einzelnen Greenschen Funktionen $\dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}}$ durch:

$$\dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} = \dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} - \mathcal{G}_{F_{ij}}$$

zu ersetzen, sowie den Polarisationsensor mit einen globalen Faktor -2 zu multiplizieren. Die Gleichung $\mathcal{G}_{F_{ij}}$ wird dabei als fermionische Greensche Funktion bezeichnet, wohingegen $\mathcal{G}_{B_{ij}}$ die bosonischen Anteile beschreibt. Die Ersetzungsregeln sind eine direkte Folge der Weltliniensymmetrie. Da dies aber im Rahmen der Arbeit keine Rolle spielen soll, wird auf eine explizite Herleitung und Diskussion dieser Regeln verzichtet. Die expliziten Ausdrücke der einzelnen Funktionen in Gleichung (3.10) für den Fall der skalaren QED sind:

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \frac{T}{2} \left(-\frac{2}{T} G_{B_{ij}} 1 + \left(\frac{1}{z} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{B_{ij}} - \cosh z}{\sinh z} \right) - \frac{2}{T} G_{B_{ij}} \right) \Lambda^2 \right), \\ \dot{A}_{B_{ij}} &= i \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{B_{ij}}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \Lambda, \\ \dot{A}_{B_{jj}} &= i \left(\frac{\cosh z}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \Lambda, \\ \dot{S}_{B_{ij}} &= \dot{G}_{B_{ij}} 1 + \left(\dot{G}_{B_{ij}} - \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{ij}}}{\sinh z} \right) \Lambda^2. \end{aligned}$$

Der Tensor Λ definiert sich über $F^{\mu\nu} = B\Lambda^{\mu\nu}$ (Anhang A).

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

3.2.3. Renormierung der 2-Punkt Korrelationsfunktion

Bisher wurde in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt auf welche Weise sich die Gleichung (3.1) für den feldfreien Fall und unter Anwesenheit eines konstanten Magnetfeldes analytisch lösen lässt. Wird aber nun das Eigenzeitintegral über T etwas genauer betrachtet, so erkennt man, dass die Funktion $\exp(-m^2 T)$ den Korrelator im Bereich großer Eigenzeiten gegen null konvergieren lässt, wohingegen im Fall $T \rightarrow 0$ das Verhalten der Funktion nicht so leicht zu erkennen ist. Eine genauere Untersuchung des Integranden zeigt, dass es in diesem Bereich zu einem divergenten Verhalten kommt, was im Rahmen der Numerik berücksichtigt werden muss. Genauer lässt sich das Verhalten an Gleichung (3.10) oder für den feldfreien Fall Gleichung (3.3) erkennen, die sich nach einer Substitution der τ -Integrale auch als

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] = (-ie)^2 \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} I^{\mu\nu} \quad (3.11)$$

schreiben lässt. Hierbei ist $I^{\mu\nu}$ der Integrand der nach den entsprechenden Substitutionen

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow T\tau, \\ x &\rightarrow \sqrt{T}y \end{aligned}$$

die Form

$$I^{\mu\nu} = \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \int_{y(0)=y(1)}^{\text{CM}} \mathcal{D}y \left(\dot{y}_1 e^{i\sqrt{T}k_1 y_1} \dot{y}_2 e^{i\sqrt{T}k_2 y_2} \right) e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{y}^2}$$

besitzt. Mittels der obigen Substitutionen wurde zu dimensionslosen Eigenzeitparametern übergegangen.

Dimension D	Verhalten des T -Integrands
2	$\delta\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2] \sim \frac{dT}{T}$
3	$\delta\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2] \sim \frac{dT}{T^{3/2}}$
4	$\delta\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2] \sim \frac{dT}{T^2}$

Tabelle 3.1.: Verhalten des T -Integranden $\delta\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2]$ im feldfreien Fall (Vakuumfall) für verschiedene Raum-Zeit-Dimensionen D .

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

In Tabelle 3.1 wurde das Verhalten des Integranden aus Gleichung (3.11) im Bereich kleiner Eigenzeiten für verschiedene Dimensionen D noch einmal explizit dargestellt. Es zeigt sich hierbei, dass für $D = 4$, die Fälle $D > 4$ sollen innerhalb dieser Arbeit nicht betrachtet werden, die Funktion ein divergentes Verhalten für $T \rightarrow 0$ aufweist. Die Divergenz verschwindet nach Anwendung einer Renormierung wie schon von Gies und Langfeld schon im Rahmen der effektiven Wirkung angewendet wurde [52]. Es stellt sich heraus das die effektive Wirkung in $D = 4$ Dimensionen renormiert werden kann, indem die quadratische Ordnung Γ_{quad} einschließlich der nackten Wirkung durch:

$$\Gamma_{\text{quad}} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\text{R}}^{\mu\nu} F_{\text{R},\mu\nu}$$

ausgedrückt wird, wobei $F_{\text{R}}^{\mu\nu}$ den renormierten Feldstärketensor bezeichnet. Für die praktische Umsetzung der Regularisierung bei einer Divergenz für kleine Eigenzeiten, die auch als UV-Divergenz bezeichnet wird, lässt sich zunächst ein Cutoff Λ einführen. Anschließend wird das Eigenzeitintegral über T in einem Bereich von $T \in [1/\Lambda^2, \infty]$ betrachtet, und der Integrand $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ mit Hilfe der Heat-Kernel Entwicklung ausgewertet. Dabei wird die analytische Lösung von $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ für das konstante Magnetfeld in einer Taylorreihe um den Cutoff $T = 1/\Lambda^2$ entwickelt. In den so erhaltenen Termen kann anschließend der Grenzübergang $\Lambda \rightarrow \infty$ betrachtet werden. Die resultierenden Entwicklungsterme, die zur Beseitigung der UV-Divergenz benötigt werden, werden auch als Counterterme bezeichnet. Dabei kommt es zu einer Cutoff-abhängigen Verschiebung der physikalischen Parameter, wie dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ und der Kopplung an das externe Feld e im Parameterraum. Eine Massenrenormierung tritt für $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ auf 1-Loop Niveau noch nicht auf, weshalb nur $\{e, F\} \rightarrow \{e_{\text{R}}, F_{\text{R}}\}$ zu betrachten ist. Ausgehend von Gleichung (3.6) ergibt sich für die Entwicklung um kleine Eigenzeiten T :

$$\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2] = (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \cdot T^2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{30} T + \frac{k^4}{420} T^2 - \frac{k^6}{7560} T^3 + \mathcal{O}(T^4) \right) (k^2 \delta_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu)$$

woraus sich die notwendigen Counterterme (**rot**) zur Beseitigung der Divergenz bestimmen lassen. Aufgrund der Ward-Identität gilt für das Produkt $e_{\text{R}} B_{\text{R}} = eB$. Die Entwicklung wurde dabei bis zur Ordnung T^3 durchgeführt, wobei jedoch zur physikalischen Renormierung für $D = 4$ nur die ersten beiden Ordnungen benötigt werden. Die nachfolgenden Entwicklungsterme (**blau**) stellen somit keine Counterterme dar. Die in diesen Termen

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

enthaltene analytische Information wird für die Numerik später jedoch nützlich sein. Für den feldfreien Fall ergibt sich somit ausgehend von Gleichung (3.11):

$$\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2] = (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \left(I^{\mu\nu} - \left(\frac{1}{3} T^2 - \frac{k^2}{30} T^3 \right) (k^2 \delta_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu) \right)$$

als renormierte 2-Punkt Funktion. Unter Berücksichtigung eines konstanten Magnetfeldes ausgehend von Gleichung (3.10) gestaltet sich die Bestimmung der einzelnen Entwicklungsterme weitaus komplizierter. Jedoch erwarten wir auch in diesem Fall ein Polynom der Art:

$$\mathcal{P}[eB, T] = a^{\mu\nu} + b^{\mu\nu} T + c^{\mu\nu} T^2 + d^{\mu\nu} T^3 + \mathcal{O}(T^4)$$

mit den tensorwertigen Entwicklungstermen $\{a, b, c, d\}$, die im einzelnen nun noch eine Feldabhängigkeit besitzen können. Wie schon in einer früheren Arbeit gezeigt worden ist [56] ergeben sich die einzelnen Terme zu:

$$\begin{aligned} a^{\mu\nu} &= \frac{1}{3} (k^2 \delta_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu), \\ b^{\mu\nu} &= -\frac{k^2}{30} (k^2 \delta_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu), \\ c^{\mu\nu} &= \frac{1}{1260} \left(3k^4 I_0^{\mu\nu} - (eB)^2 \left(196 I_\Lambda^{\mu\nu} - 28 I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + 98 I_0^{\mu\nu} \right) \right), \\ d^{\mu\nu} &= -\frac{1}{7560} \left(k^6 I_0^{\mu\nu} - (eB)^2 (k \Lambda^2 k) \left(240 I_\Lambda^{\mu\nu} - 24 I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + 78 I_0^{\mu\nu} \right) \right. \\ &\quad \left. + (eB)^2 (k \tilde{\Lambda}^2 k) \left(240 I_\Lambda^{\mu\nu} - 24 I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + 66 I_0^{\mu\nu} \right) \right), \end{aligned}$$

mit tensorwertigen Funktionen $\{I_0^{\mu\nu}, I_\Lambda^{\mu\nu}, I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu}\}$, die im Anhang A dargestellt sind. Eine interessante Erkenntnis ist dabei, dass die zur Renormierung notwendigen Counterterme a und b auch im konstanten Magnetfeld exakt den Termen des feldfreien Falls entsprechen. Die Feldabhängigkeit der Funktion ist erst in der Ordnung T^2 zu finden, demzufolge ab den Entwicklungsterm $c^{\mu\nu}$.

3.3. Numerische Bestimmung der 2-Punkt Korrelationsfunktion

Die Motivation den 2-Punkt Korrelator mit Hilfe des Weltlinienformalismus numerisch zu betrachten, liegt unter anderem darin begründet, dass vollständig analytische Lösungen für räumlich inhomogene Hintergrundfelder bislang nicht zugänglich sind. Zunächst wurde

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

von Gies und Langfeld [52; 51] die effektive Wirkung Γ mit Hilfe dieses Formalismus in der sQED und QED betrachtet. Im Weiteren war es dann das Ziel Casimir Energien für verschiedene Geometrien zu untersuchen [48]. In einer Vielzahl weiterer Arbeiten wurden dann unter anderen die Paarbildung [54], sowie fermionische Systeme [75] mit der Weltliniennumerik betrachtet. Eine Berücksichtigung der vollen Quantenelektrodynamik ist in [51] zu finden. Zur numerischen Lösung der effektiven Wirkung entwickelten die Autoren einen Algorithmus mit dem es möglich ist ein Ensemble von geschlossenen Weltlinien nach der Gleichung

$$\Gamma^1 \sim \int_{y(0)=y(1)} \mathcal{D}y \langle \dots \rangle e^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{y}^2}{4}}$$

zu generieren, der auch als V-Loop Algorithmus bezeichnet wird. Dabei werden die Weltlinien zunächst in der Eigenzeit diskretisiert:

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &\sim \int \prod_{i=1}^{N-1} dy_i \langle \dots \rangle e^{-\frac{N}{4} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i-1})^2} \\ &\sim \int \prod_{i=1}^{N-1} dy_i \langle \dots \rangle e^{-\frac{N}{4} \sum_{i=2}^{N-1} (y_i - y_{i-1})^2 + (2y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1})^2 + (y_1 + y_2 + \dots + 2y_{N-1})^2}. \end{aligned}$$

Für die Bestimmung wurde die Bedingung verwendet, dass es sich um geschlossene Pfade handelt, für die gelten soll:

$$y_0 = y_N.$$

Die Schwerpunktbedingung impliziert:

$$-y_N = y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1}.$$

Das Ziel der Diskretisierung besteht nun darin, die Exponentialfunktion in eine reine Gaussform zu bringen, was mit Hilfe einiger Substitutionen geschieht die genauer in [48] und im Anhang E erklärt sind. Mit Hilfe des Box-Müller Verfahrens [76] ist es anschließend möglich sich ein Ensemble von gaussförmig verteilten Zufallszahlen zu generieren, die nach Durchlaufen des V-Loop Algorithmus im einzelnen die Forderungen des Pfadintegrals erfüllen. Neben dem V-Loop Algorithmus entwickelten Gies, Sanchez-Guillen und Vazquez [50] noch eine Methode um Weltlinien zwischen zwei spezifischen Punkten zu generieren, wie es unter anderem bei der Bestimmung der 2-Punkt Funktion im Ortsraum nützlich wäre. In dieser Arbeit arbeiten wir in der Regel im Impulsraum und verwenden ausschließlich den V-Loop Algorithmus. Ausgehend von Gleichung (3.3) sollen nun

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

die einzelnen Schritte der Diskretisierung erläutert werden. Als erstes wird eine Transformation in den Weltlinienkoordinaten x^μ und den Eigenzeiten τ vorgenommen, um eine Unabhängigkeit der einzelnen Integrale von der Dimension der Eigenzeit zu erreichen. Hierzu folgt aus der Gleichung für die 2-Punkt Funktion im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \left(\dot{x}_1^\mu e^{ik_1 x_1} \dot{x}_2^\nu e^{ik_2 x_2} \right) \mathcal{W}[A] \exp \left(- \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} \right) \\ &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{y(0)=y(1)}^{\text{CM}} \mathcal{D}y \left(\dot{y}_1^\mu e^{i\sqrt{T}k_1 y_1} \dot{y}_2^\nu e^{i\sqrt{T}k_2 y_2} \right) \mathcal{W}[A] \exp \left(- \int_0^1 d\tau \frac{\dot{y}^2}{4} \right). \end{aligned}$$

In der Gleichung bezeichnet $\mathcal{W}[A]$ den Wilsonloop, der die Abhängigkeit vom externen Feld trägt. Im Einzelnen wurden die Weltlinienkoordinaten über $x \rightarrow \sqrt{T}y$ und die Eigenzeiten über $\tau \rightarrow T\tau$ transformiert, wie es schon im Abschnitt zu der Renormierung geschehen ist. Da schon gezeigt worden ist, auf welche Weise das Pfadintegral behandelt werden soll, nämlich das die einzelnen Weltlinien mit Hilfe des entsprechenden Algorithmus generiert werden, soll im Weiteren der Polarisationsensor mit

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \\ &\quad \times \left\langle \left(\dot{y}_1^\mu e^{i\sqrt{T}k_1 y_1} \dot{y}_2^\nu e^{i\sqrt{T}k_2 y_2} \right) \mathcal{W}[A] \right\rangle \end{aligned}$$

beschrieben werden. Auf den Ausdruck in $\langle \dots \rangle$ wird das generierte Ensemble angewendet. Im nächsten Schritt werden die dimensionslosen Eigenzeitintegrale diskretisiert, was auf

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \\ &\quad \times \left\langle \sum_{i,j=1}^N \left((y_{1,i}^\mu - y_{1,i-1}^\mu) e^{i\sqrt{T}k_1 y_{1,i}} (y_{2,j}^\nu - y_{2,j-1}^\nu) e^{i\sqrt{T}k_2 y_{2,j}} \right) \mathcal{W}[A] \right\rangle \end{aligned}$$

führt. In numerischer Hinsicht sind die Differenzen in den Weltlinienkoordinaten $y_{l,j}^\nu - y_{l,j-1}^\nu$ mit $l = 1, 2$, die durch die Diskretisierung der Ableitungen entstanden sind nicht günstig,

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

denn diese können zu einer Instabilität des Algorithmus führen. Durch eine Verschiebung der Indizes kann die Gleichung mit

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2|A] &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \\ &\quad \times \left\langle \sum_{i,j=1}^N \left(y_{1,i}^\mu \left(e^{i\sqrt{T}k_1 y_{1,i}} - e^{i\sqrt{T}k_1 y_{1,i+1}} \right) y_{2,j}^\nu \left(e^{i\sqrt{T}k_2 y_{2,j}} - e^{i\sqrt{T}k_2 y_{2,j+1}} \right) \right) \mathcal{W}[A] \right\rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

in eine numerisch besser Form gebracht werden. Die 2-Punkt Funktion muss wegen der geforderten Eichsymmetrie die Ward-Identität $k_\mu \Pi_{2P}^{\mu\nu} = \Pi_{2P}^{\mu\nu} k_\nu = 0$ erfüllen. Auch die diskretisierte numerische Form der Gleichung (3.3) soll diese exakt erfüllen, was durch die Gleichung (3.12) nicht garantiert wird. Um dies zu gewährleisten kann man den Polarisationsensor $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ in einen longitudinalen (L) und transversalen (T) Anteil zerlegen [56]:

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu} = \Pi_{2P,L}^{\mu\nu} + \Pi_{2P,T}^{\mu\nu}.$$

Hierzu verwenden wir die Projektoren

$$\hat{P}_{i,L}^{\mu\nu} = \frac{k_i^\mu k_i^\nu}{k_i^2}, \quad \hat{P}_{i,T}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - \frac{k_i^\mu k_i^\nu}{k_i^2}$$

mit den Eigenschaften $\hat{P}_{L,T}^2 = 1$ und $\hat{P}_L \hat{P}_T = 0$. Für die Projektion der 2-Punkt Funktion auf den longitudinalen Unterraum ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P,L}^{\mu\nu} &= \hat{P}_{1,L}^{\mu\sigma} \hat{P}_{2,L}^{\nu\rho} \Pi_{2P,\sigma\rho}[k_1, k_2|A] \\ &= (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_2^2} \\ &\quad \left\langle \sum_{i,j=1}^N \left(k_1^\mu (k_1 y_{1,i}) \left(e^{i\sqrt{T}k_1 y_{1,i}} - e^{i\sqrt{T}k_1 y_{1,i+1}} \right) k_2^\nu (k_2 y_{2,i}) \left(e^{i\sqrt{T}k_2 y_{2,j}} - e^{i\sqrt{T}k_2 y_{2,j+1}} \right) \right) \mathcal{W}[A] \right\rangle. \end{aligned}$$

Nach der Ward-Identität verschwindet $\Pi_{2P,L}^{\mu\nu}$ im Kontinuumsimes. Der transversale Anteil $\Pi_{2P,T}^{\mu\nu}$ kann entsprechend als

$$\Pi_{2P,T}^{\mu\nu} = \Pi_{2P}^{\mu\nu} - \Pi_{2P,L}^{\mu\nu}$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

geschrieben werden. Für die Projektion auf den transversalen Unterraum ergibt sich auf diese Weise:

$$\begin{aligned} \Pi_{2P,T}^{\mu\nu} = & (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_2^2} \\ & \times \left\langle \sum_{i,j=1}^N \left(\left[y_1^\mu - \frac{k_1^\mu (k_1 y_{1,i})}{k_1^2} \right] \left(e^{i\sqrt{T} k_1 y_{1,i}} - e^{i\sqrt{T} k_1 y_{1,i+1}} \right) \right. \right. \\ & \times \left. \left[y_2^\nu - \frac{k_2^\nu (k_2 y_{2,i})}{k_2^2} \right] \left(e^{i\sqrt{T} k_2 y_{2,j}} - e^{i\sqrt{T} k_2 y_{2,j+1}} \right) \right) \mathcal{W}[A] \right\rangle + \text{Mischterme.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die dargestellten Terme sind exakt transversal. Die Mischterme, welche nicht explizit aufgeführt sind, haben im Kontinuumslimit die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\tau (k \dot{y}) e^{i\sqrt{T} k y} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{i\sqrt{T}} \int_0^1 d\tau e^{i\sqrt{T} k y} \right) \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{kT} \left[e^{i\sqrt{T} k y(1)} - e^{i\sqrt{T} k y(0)} \right] \right). \end{aligned}$$

Im Fall von geschlossenen Pfaden $y(0) = y(1)$ verschwinden die Mischterme identisch. Somit entspricht die Projektion der 2-Punkt Funktion auf den transversalen Unterraum, das heißt die explizit dargestellten Terme, im Kontinuumslimit der eigentlichen Korrelationsfunktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$. Die Gleichung (3.13) besitzt außerdem den Vorteil, dass die Ward-Identität auch in der diskretisierten Form exakt erfüllt wird. In numerischer Hinsicht wird der Kontinuumslimit durch eine entsprechend groß gewählte Stützstellenzahl der Weltlinien garantiert.

3.3.1. Stabilität des numerischen Algorithmus

Die Grundgleichung, auf der der numerische Algorithmus basiert, ist Gleichung (3.13), die im vorangegangenen Abschnitt abgeleitet worden ist. Eine genauere Betrachtung dieser Gleichung zeigt, dass die Exponentialfunktionen, der Form $\exp(i\sqrt{T} k y)$, aufgrund des oszillierenden Verhaltens zu einer Vergrößerung der statistischen Fluktuationen beitragen. Hinzu kommt, dass die einzelnen Photonenvektoren k_j als minkowskiwertige Größen in den Algorithmus gegeben werden müssen, was zu potentiellen Instabilitäten führt. Ein

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

erster Ansatz diesen Effekten entgegen zu wirken, stellt eine Vergrößerung der Statistik dar, das bedeutet die Erhöhung der Anzahl der Weltlinien. Dies ist nach der Bedingung:

$$\int \mathcal{D}x \rightarrow \sum_{i=1}^{n_L}$$

prinzipiell richtig (n_L beschreibt die Anzahl der Weltlinien im Ensemble), hat aber den Nachteil, dass die Größe der Statistik durch die zu Verfügung stehenden Hardwareressourcen und die damit verbundene Rechenzeit begrenzt ist. Somit ist ein Ansatz erforderlich, der den Algorithmus hinreichend stabilisiert, ohne das Ensemble unnötig vergrößern zu müssen. Die von uns verwendete Methode schlägt vor, dass analytische Wissen nach Schubert über die Entwicklung für kleine Eigenzeiten mit in die Numerik zu geben. Im Prinzip bedeutet dies, mit Hilfe des Weltlinienformalismus verschiedene Punkte $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T, k_1, k_2|A]$ als Funktion von T zu bestimmen, die im nächsten Schritt an ein Polynom der Form

$$\mathcal{P} = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (3.14)$$

angefittet werden sollen. Hierzu verwenden wir das Nonlinear-Least-Squares Verfahren [77], welches die numerische Bestimmung der Koeffizienten $\{a, b, c, d\}$ ermöglicht. Der Parameterbereich für die Eigenzeit T wird dabei so gewählt, dass die lokalen Informationen der Funktion $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ durch das Weltlinienensemble vollständig erfasst wird. Dieser Bereich darf jedoch nicht zu groß gewählt werden, weil sonst die lokale Information durch andere Effekte überlagert werden. Die Anpassung der vorhandenen physikalischen Parameter (\vec{k}, ω, eB) erfolgt in diesem Zusammenhang aufgrund von Erfahrungswerten. Die Schwierigkeit besteht nun in der Frage, wie viele Datenpunkte $N > 4$ in das Nonlinear-Least-Squares Verfahren gegeben werden müssen, um das optimale Fitresultat zu erhalten. Hierzu bietet es sich an, den ersten feldabhängigen Entwicklungsterm

$$c_{\text{ana}}^{\mu\nu} = \frac{1}{1260} \left(3k^4 I_0^{\mu\nu} - (eB)^2 \left(196 I_\Lambda^{\mu\nu} - 28 I_\Lambda^{\mu\nu} + 98 I_0^{\mu\nu} \right) \right)$$

zur Optimierung der Routine zu verwenden. Im späteren Fall des räumlich inhomogenen Magnetfeldes $eB = eB(z)$ soll eine lokal-konstante Feldnäherung $eB = eB_{\text{loc}}$ des entsprechenden Terms verwendet werden. Im Genaueren erfolgt die Stabilisierung auf folgende Weise:

- Übergabe eines Ensembles von N Datenpunkten $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T, k_1, k_2|A]$ an das Nonlinear-Least-Squares Verfahren mit den Polynomen:

1. $\mathcal{P} = a + bT + c_1 T^2 + dT^3$

2. $\mathcal{P} = a_{\text{ana}} + bT + c_2 T^2 + dT^3$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

$$3. \mathcal{P} = a_{\text{ana}} + b_{\text{ana}}T + c_3T^2 + dT^3$$

wobei a_{ana} und b_{ana} , die aus der analytischen Lösung bekannten Koeffizienten darstellen.

- Vergleich der Koeffizienten c_j ($j = 1, 2, 3$) mit dem analytischen Wert c_{ana} nach:

$$\delta_j = |c_j - c_{\text{ana}}|.$$

- Bestimmung der minimalen Abweichung $\min(\delta_j)$.
- Rekursive Anwendung der Vorgehensweise und somit im nächsten Schritt auf $N - 1$ Datenpunkte. Insgesamt ergeben sich $N-4$ Durchläufe zur Bestimmung von $\min(\delta_j)$.

was auf $N - 4$ verschiedene Werte $\min(\delta_j)$ führt, von denen letztendlich der beste Fit durch das Minimum dieses Ensembles definiert wird. Im Fall unendlich großer Statistik ergäbe sich aus allen Fitmöglichkeiten das exakte Resultat. Für den realen Fall endlich großer Statistik wird mit dieser Methode dasjenige Ensemble ausgewählt, das bereits den größten Überlapp mit dem analytisch bekannten exakten Ergebnis bei kleinen Eigenzeiten hat. Durch diese Vorgehensweise wird der Algorithmus ausreichend stabilisiert, was gerade im Fall räumlich inhomogener Magnetfelder von zentraler Bedeutung ist. Unter anderem liegt dies an der Tatsache, dass in diesem Fall nur lokale analytischen Vergleichswerte vorliegen. Nach der Bestimmung der einzelnen Koeffizienten, die im Weiteren mit $\{a, b, c, d\}$ bezeichnet werden sollen, kann nach Gleichung (3.14) das Polynom bestimmt werden. Da diese Näherung jedoch nur für kleine Eigenzeiten die richtigen Lösungen liefert, muss im nächsten Schritt noch ein Umschaltzeitpunkt T_D bestimmt werden. Für diesen soll gelten:

- $T < T_D$:

$$\Pi_{2P,T}^{\mu\nu} = (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} (c^{\mu\nu} T^2 + d^{\mu\nu} T^3) \quad (3.15)$$

- $T \geq T_D$:

$$\Pi_{2P,T}^{\mu\nu} = (-ie)^2 \delta^D(k_1 + k_2) \int_0^\infty dT \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} (\delta \Pi_{2P}^{\mu\nu}[T, k_1, k_2|A] - a^{\mu\nu} - b^{\mu\nu} T). \quad (3.16)$$

Das heißt für $T < T_D$ wird die analytisch bekannte heat-kernel Entwicklung lokal verwendet, während für $T \geq T_D$ das volle renormierte numerische Resultat genutzt wird. Dieser Übergang wird je nach Simulation dynamisch festgelegt und richtet sich nach den

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

numerischen Fehlern der einzelnen Gleichungen. Genauer bestimmen sich die statistischen Fehler von Gleichung (3.15) zu

$$\Delta\mathcal{P} = \Delta a + \Delta bT + \Delta cT^2 + \Delta dT^3$$

und Gleichung (3.16) zu $\Delta(\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T, k_1, k_2|A])$, der mit Hilfe des Jackknife-Algorithmus direkt numerisch bestimmt werden können. Der Umschaltpunkt T_D ist somit mit Hilfe der statistischen Fehler definiert über:

$$\Delta\mathcal{P}[T_D] \approx \Delta(\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T_D, k_1, k_2|A]).$$

Innerhalb der Numerik bedeutet dies, dass T_D an genau der Stelle liegt, an der der statistische Fehler $\Delta(\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T_D, k_1, k_2|A])$ gerade noch leicht oberhalb des Fehlers aus den Nonlinear-Least-Square Verfahren zu finden ist. Zusammenfassend erfolgt die Stabilisierung des numerischen Algorithmus durch:

1. Bestimmung von N Datenpunkten $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T_k, k_1, k_2|A]$ mit $T_k \in [T_1, \dots, T_N]$.
2. Bestimmung der Counter- und Korrekturterme mit Hilfe des Nonlinear-Least-Squares Verfahren entsprechend der Bedingung $eB = 0$ oder $eB = eB_{\text{loc}}$ und Optimierung an den ersten feldabhängigen Term $c^{\mu\nu}$.
3. Übergang zwischen Polynomdarstellung und renormierter Gleichung bei T_D .

3.3.2. Räumlich inhomogenes Magnetfeld in der Numerik

Bisher wurde das vorhandene Feld $e\vec{B}$ durch den Wilsonloop:

$$\mathcal{W}[A] = e^{-ie \oint dx_\mu A^\mu}$$

in die einzelnen Gleichungen gegeben, wobei A^μ das Eichfeld symbolisiert und die eigentliche Feldinformationen trägt. Aus der Elektrodynamik nach Maxwell ist außerdem die Beziehung:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.17}$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

bekannt, mit welcher der Zusammenhang zwischen 3-dimensionalem Feldvektor \vec{B} und Eichpotential \vec{A} beschrieben wird. Für ein konstantes Magnetfeld $e\vec{B} = \text{const}$ ergibt sich nach Gleichung (3.17)

$$A^\mu = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}x_\nu = \frac{1}{2}B\Lambda^{\mu\nu}x_\nu,$$

was in Gleichung (3.7) schon angewendet wurde. Der 4-dimensionale Tensor $\Lambda^{\mu\nu}$ lässt sich auch schreiben als:

$$\Lambda^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Komponenten des elektrischen Feldes, in unserem Fall, über $\Lambda^{4\mu} = -\Lambda^{\mu 4}$ (Anhang A) definiert. Zur Anwendung in den numerischen Routinen ist wiederum eine Diskretisierung der einzelnen Ausdrücke notwendig und führt für den Wilson-Loop auf:

$$\mathcal{W}[A] = \exp \left(-\frac{1}{2}ieT \sum_{j=1}^N x_{j,\mu} F^{\mu\nu} (x_j - x_{j-1}) \right).$$

An dieser Stelle wird noch einmal der Vorteil des Weltlinienformalismus deutlich, in den das externe Feld exakt in die einzelnen Gleichungen eingeht und keine Näherungsrechnung notwendig ist. Im ersten Schritt ist die Untersuchung eines konstanten Feldes für die Frage wichtig, ob eine Anwendung der Weltliniennumerik zur Bestimmung der 2-Punkt Funktion überhaupt möglich ist [56]. Hierbei wurde von uns zunächst untersucht, wie gut die analytischen Resultate nach Schubert wiedergegeben werden können und in welchem Parameterbereich dies überhaupt möglich ist. In Abbildung 3.2 ist das Ergebnis für den Integranden $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ dargestellt, das mit einem Ensemble von 20000 Weltlinien bestimmt worden ist. Die Anzahl der Punkte pro Weltlinie soll dabei in allen zukünftigen Rechnungen mit 1000 festgesetzt werden, weil diese Anzahl die besten Resultate im Vergleich zur Rechenzeit liefert. Es ist zu erkennen, dass bei der gewählten Ensemblegröße die Ergebnisse von Schubert schon sehr gut wiedergegeben werden. Dabei wurde die Betrachtung zunächst unter Abwesenheit eines externen Feldes, das heißt für $eB = 0.0$, durchgeführt. In Abbildung 3.3 wurde über eine Betrachtung des statistischen Fehlers für einen beliebigen Punkt $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ der Einfluss der Ensemblegröße untersucht. Dabei zeigt sich, dass mit größer werdendem Weltlinienensemble der statistische Fehler reduziert werden kann, jedoch dies nicht in direkter Proportionalität zueinander geschieht. Vielmehr zeigt sich, dass ein exponentieller Zusammenhang besteht und eine Ensemblegröße von 40000 Weltlinien im

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

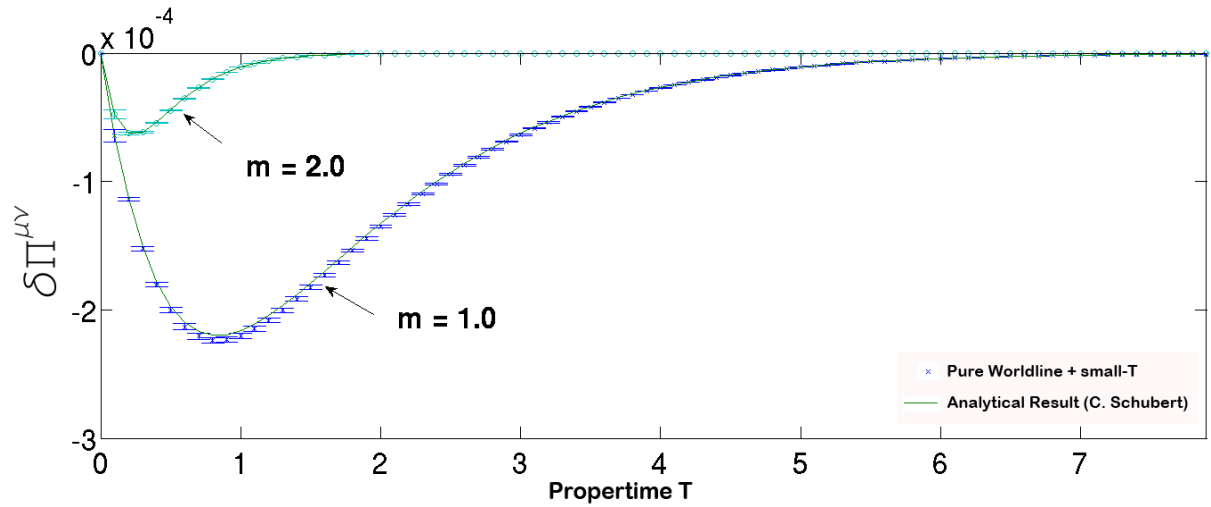


Abbildung 3.2.: Ergebnis der Weltliniensimulation für den Integranden $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ der 2-Punkt Funktion in 11-Richtung für verschiedene Massen m im Fall $B = 0$ (Vakuumfall). Als Photonenvektor wurde $k_1 = (1, 1, 1, 1)$ gewählt bei einem Ensemble von 20000 Weltlinien.

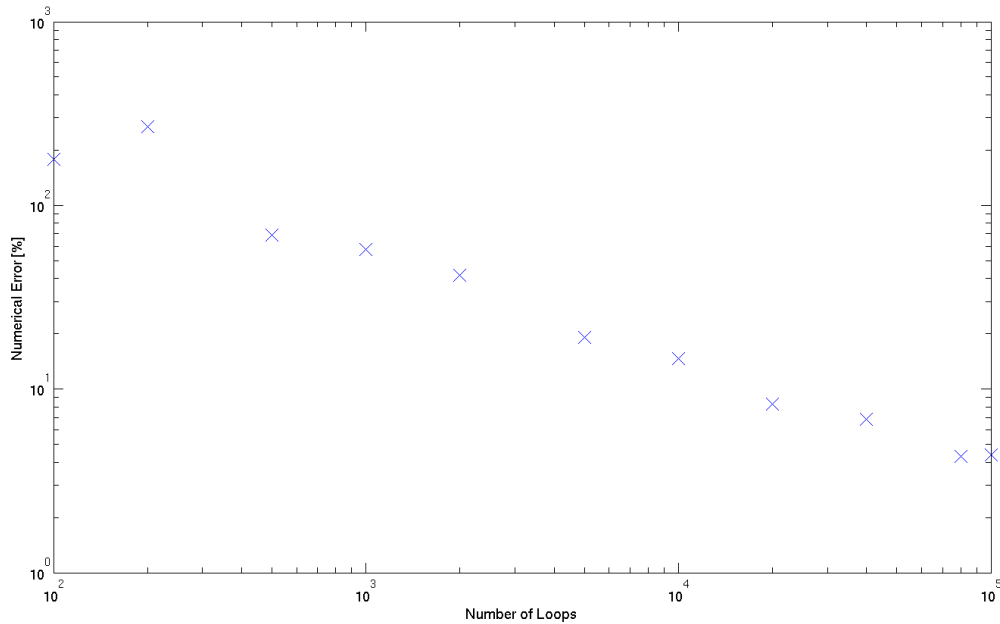


Abbildung 3.3.: Verhalten des statistischen Fehlers der 2-Punkt Funktion in Abhängigkeit von der Größe des Weltlinienensembles. Die Stärke des externen Feldes wurde dabei mit $eB_0 = 0.0$ gewählt, bei einen einfallenden Photon $k = (0, 0, 0.1, 0.1)$.

Fall der 2-Punkt Funktion die besten Ergebnisse unter Berücksichtigung der vorhandenen Hardwareressourcen liefert. Im Weiteren ist es das Ziel, räumlich inhomogene Magnetfelder zu untersuchen, um das Verhalten vor allem auf Niveau der Comptonwellenlänge

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

$\lambda_C = m^{-1}$ besser zu verstehen. Die Feldstärke des Magnetfeldes, sowie alle Wellenlängen werden dabei zukünftig in Einheiten der Comptonwellenlänge $\lambda_C = m^{-1} = 1$ (Ausnahmen werden explizit angegeben) gemessen. Für ein Feld mit $eB = 0.2$ bedeutet dies, dass genauer $eB = 0.2 \cdot m^2$ gemeint ist. Eine gleiche Notation erfolgt bei den Frequenzen, die im Weiteren mit $\omega = 0.2 \cdot m \equiv 0.2$ angegeben werden. Als erstes kann eine oszillierende Inhomogenität der Art

$$\vec{B} = B_0 + B_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_B} z + \phi\right) \vec{e}_1 \quad (3.18)$$

betrachtet werden, wobei $\phi = \frac{2\pi}{\lambda_B} z_{\text{CM}}$ den Betrachtungspunkt als Phase innerhalb der Periodizität des Feldes charakterisiert. Später untersuchen wir im Zusammenhang mit der Quantenreflexion ein lorentzförmiges Feld der Art:

$$\vec{B} = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z+z_{\text{CM}}}{\lambda_B}\right)^2} \vec{e}_1. \quad (3.19)$$

Die maximale Feldstärke soll in Gleichung (3.19) durch B_0 bezeichnet werden, während in (3.18) diese $B_0 + B_1$ ist. Mit der redundanten Notation $z \rightarrow z + z_{\text{CM}}$ soll zum Ausdruck gebracht werden, dass bei der Weltlinienintegration durch die Weltlinienkoordinate z eine ganze Umgebung um den Punkt z_{CM} abgetastet wird. Der Vorteil der lorentzförmigen Inhomogenität (Gleichung (3.19)) im Vergleich zur oszillierenden (Gleichung (3.18)) liegt in der räumlichen Begrenzung, was einem Laserpuls am nächsten kommt. Das oszillierende Feld kann man als einfaches Modell eines ausgedehnten (optischen) Pulses mit einer überlagerten höheren Harmonischen interpretieren. In Abbildung 3.4 ist die Struktur der inhomogenen Felder explizit dargestellt, worin auch noch einmal die Bedeutung des zusätzlichen Freiheitsgrades $\phi = \frac{2\pi}{\lambda_B} z_{\text{CM}}$ für das oszillierende Feld verdeutlicht wird. Über

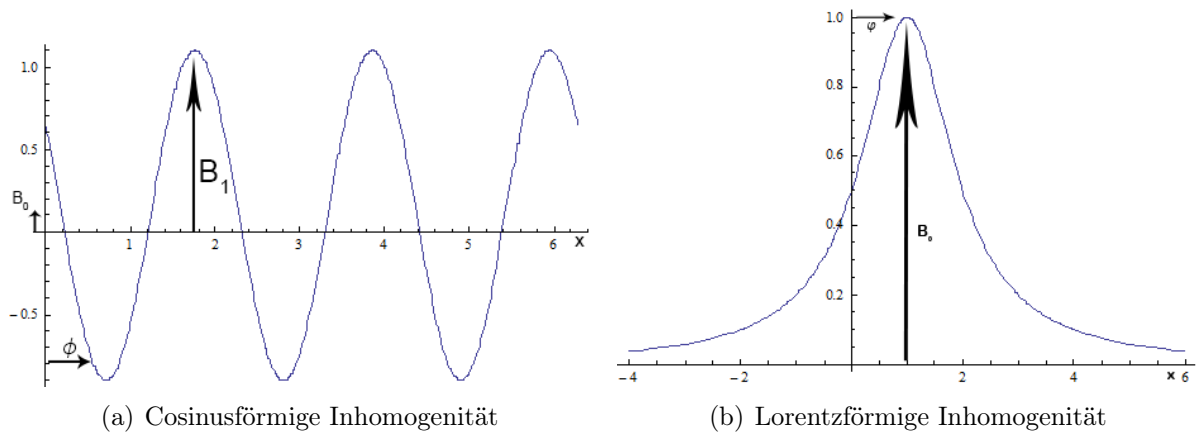


Abbildung 3.4.: Struktur der Inhomogenität des Magnetfeldes $\vec{B}(z)$.

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

die Gleichung (3.17) können nun die entsprechenden Vektorpotentiale bestimmt werden, die zur Berechnung der 2-Punkt Funktion notwendig sind. Hieraus folgt zum Beispiel im Fall des oszillierenden Feldes modulo Eichtransformation:

$$\vec{A} = B_0 z \vec{e}_2 + \frac{B_1 \lambda_B}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_B} z + \phi\right) \vec{e}_2. \quad (3.20)$$

3.4. Phasengeschwindigkeit v_{ph} im räumlich oszillierenden Magnetfeld

In der Strahlenoptik und auch in der Quantenmechanik wird die Propagation eines Strahlungsphotons oder Wellenpaketes durch verschiedene Geschwindigkeiten beschrieben. Zum einen die Phasengeschwindigkeit eines Photons oder Teilchens, die über

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

definiert wird, und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|},$$

die die Geschwindigkeit eines Wellenpaketes beschreibt. Die Funktion $\omega(\vec{k})$ wird dabei als Dispersionsrelation bezeichnet. Auch in der Quantenfeldtheorie ist es möglich die Phasengeschwindigkeit des betrachteten Photons zu definieren, wobei die Information über die Wechselwirkung mit dem Quantenvakuum und den anliegenden externen Feldern durch den Polarisationsensor $\Pi_{2P}^{\mu\nu}(k_1, k_2|A)$ beschrieben. Es handelt sich nach wie vor um eine 1-Loop Näherung der effektiven Wirkung $\Gamma^1[A]$. In [49; 26; 55] wurde die Lichtkegelbedingung über:

$$\Pi_{i,2P} + k^2 = 0$$

definiert ($i = \perp, \parallel$), in der $\Pi_{i,2P}$ die Eigenwerte des Polarisationsensors darstellen. In Verbindung mit der Gleichung für die Phasengeschwindigkeit v_{ph} ergibt sich somit:

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{1 + \frac{\Pi_{i,2P}}{k^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\Pi_{i,2P}}{k^2} = 1 + \Delta v_{\text{ph}}.$$

Der Vektor \vec{k} beschreibt die räumliche Propagationsrichtung des einfallenden Photons und $\Pi_{i,2P}$ stellt eine Projektion der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ auf den parallelen (\parallel) oder senk-

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

rechten (\perp) Unterraum dar. In den späteren Darstellungen werden wir uns dann direkt auf den relevanten Anteil der Verschiebung der Phasengeschwindigkeit Δv_{ph} beziehen. Die Abbildung des Korrelators auf die entsprechenden Eigenräume erfolgt analog zu der Vorgehensweise im vorangegangenen Abschnitt, mit Hilfe von Projektoren $\hat{P}_i^{\mu\nu}$ ($i = \parallel, \perp$). Zunächst ist wieder eine Betrachtung der Observablen $v_{\text{ph},i}$ im konstanten Magnetfeld eB_0 von Vorteil, um einen Test der Numerik durchzuführen. Hierzu wurde im Grenzfall schwacher Felder (Schwachfeldnäherung) [49] eine analytische Gleichung für die Phasengeschwindigkeiten gefunden. Als Schwachfeldnäherung wird dabei der Fall $B/B_{\text{cr}} \ll 1$ bezeichnet, in der das Magnetfeld B sehr viel kleiner ist als die kritische Feldstärke B_{cr} ist. Im Fall einer skalaren Theorie ergeben sich die Gleichungen [32]

$$\begin{pmatrix} v_{\perp} \\ v_{\parallel} \end{pmatrix} = 1 + \begin{pmatrix} 7/90 \\ 1/90 \end{pmatrix} \frac{(e^2 B)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^4} \sin^2 \theta \quad (3.21)$$

für die gesuchte Observable. In Gleichung (3.21) beschreibt θ den Winkel zwischen der Propagationsrichtung \vec{k} des einfallenden Photons und der Richtung des externen Feldes \vec{B} . Im Hinblick auf die Numerik ist es möglich einen Test durchzuführen, indem die Reproduzierbarkeit der Faktoren $a_{\parallel} = 1/90$ und $a_{\perp} = 7/90$ überprüft wird. In Abbildung 3.5

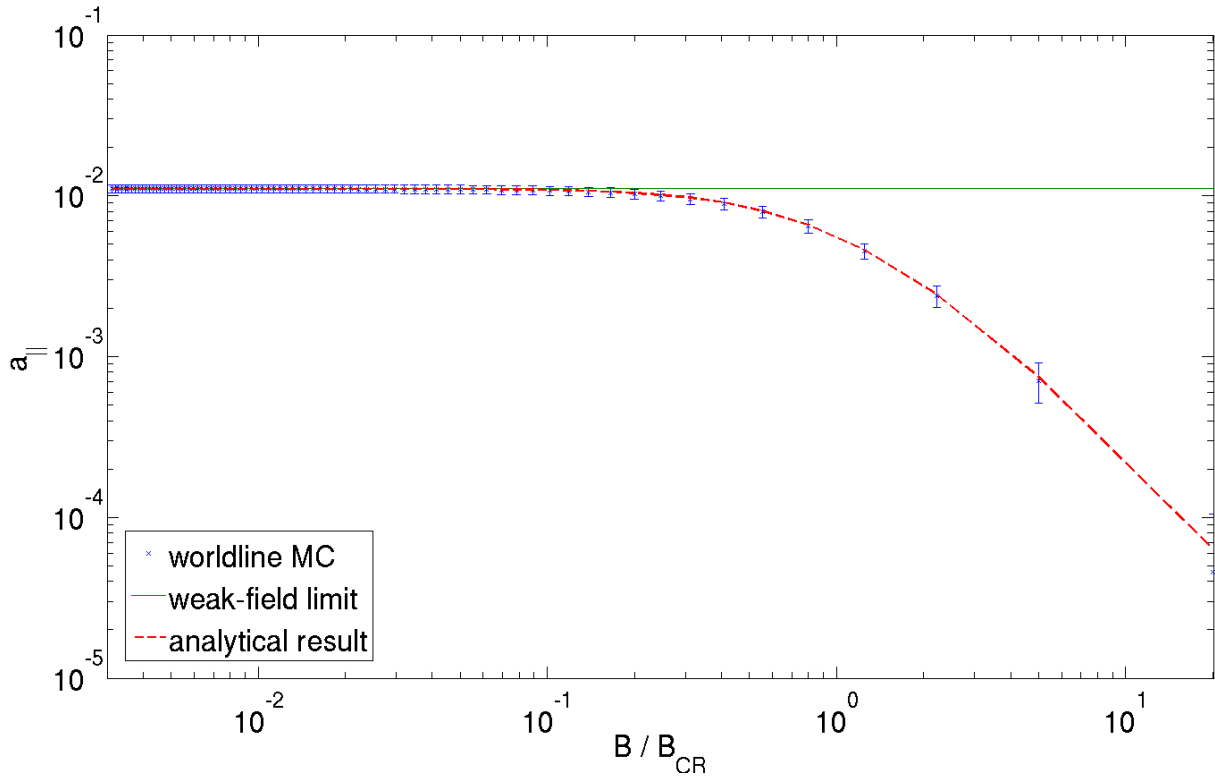


Abbildung 3.5.: Bestimmung des Vorfaktors a_{\parallel} im parallelen Fall für $\theta = \pi/2$ und $\omega = 0.1m$. Im Grenzfall eines schwachen Magnetfeldes ($B/B_{\text{cr}} \ll 1$), sollten die numerischen Resultate gegen den Faktor $(1/90)$ konvergieren.

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

sind die Ergebnisse dieses Benchmarktests exemplarisch für a_{\parallel} , beziehungsweise für die Verallgemeinerung dieses Faktors auf beliebige Feldstärken, dargestellt. Für einen Winkel $\theta = \pi/2$ und einer Photonenenergie $\omega = 0.1$ wurde die Numerik für verschiedene Feldstärken eB überprüft. Hierbei sind die analytischen Resultate für die sQED [32] im konstanten Magnetfeld durch die **rote** Linie dargestellt. Der Grenzfall kleiner Feldstärken für den Faktor a_{\parallel} ist durch die **grüne** Linie repräsentiert. Es ist zu erkennen, dass mit schwächer werdendem externen Magnetfeld $eB \rightarrow 0$ die Weltlinienrechnungen analog zu den analytischen Werten gegen $a_{\parallel} = (1/90)$ konvergieren. Die Weltliniensimulation wurde mit einem Ensemble von 40000 Weltlinien und einen einfallenden Photon $k = (0, 0, 0.1, 0.1)$ durchgeführt. Somit konnten wir nach den Resultaten aus Abbildung 3.5 zeigen, dass es mit Hilfe der Weltliniennumerik möglich ist die analytischen Resultate sowohl im Grenzfall schwacher Magnetfelder als auch bei größeren Feldstärken zu reproduzieren. Im nächsten Schritt soll die Phasengeschwindigkeit v_{ph} in einem räumlich oszillierenden Magnetfeld, entsprechend Abbildung 3.6 und Gleichung (3.18), betrachtet werden. Hierzu wird in die

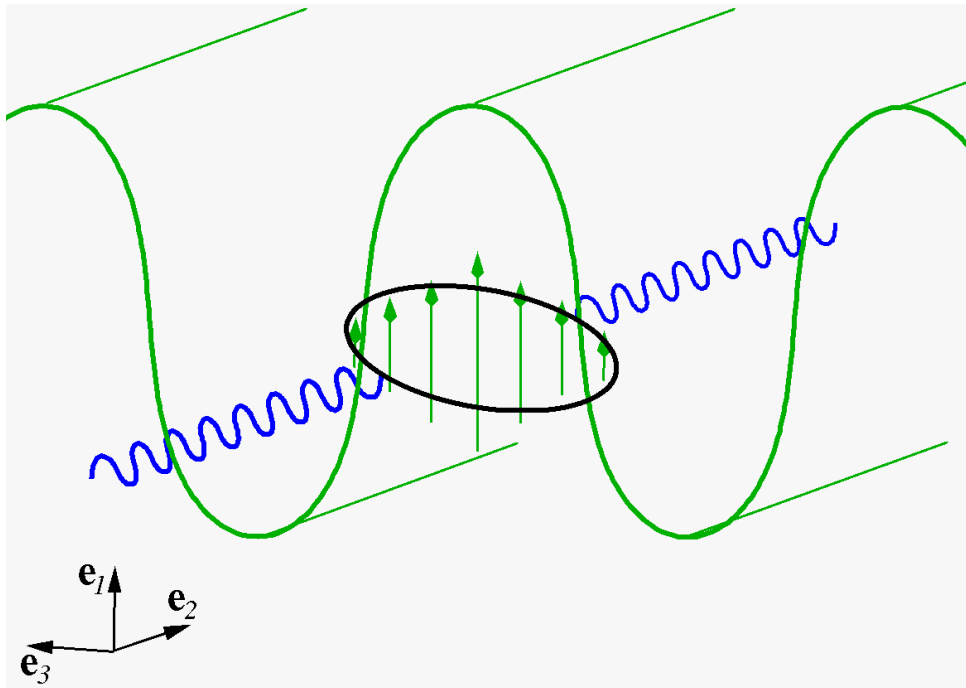


Abbildung 3.6.: Schematische Darstellung der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ im oszillierenden Magnetfeld $eB(z)$. Die Orientierung des Feldes in e_1 -Richtung ist durch die **grünen** Pfeile gekennzeichnet. Die Inhomogenität breitet sich in e_3 -Richtung aus.

Gleichung (3.12) für die 2-Punkt Funktion das Vektorpotential aus Gleichung (3.20) eingesetzt. Die einzelnen Counterterme $\{a, b, c, d\}$, die zur Renormierung des Eigenzeitintegrals

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

benötigt werden, wurden mittels der lokalen heat-kernel Entwicklung bestimmt. Hierbei ist in den entsprechenden Gleichungen das Feld $\vec{B}(z)$ durch das lokale Feld

$$\vec{B}_{\text{lokal}}(z_{\text{CM}}) = \left[B_0 + B_1 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_B} z_{\text{CM}} \right) \right] \vec{e}_1$$

ersetzt wurden. Für die Numerik bedeutet dies, dass in Abhängigkeit von der Variationslänge des Feldes λ_B und dem Massenschwerpunkt in e_3 -Richtung z_{CM} die einzelnen Entwicklungsterme, sowie der zugehörige Umschaltpunkt T_D neu bestimmt werden müssen. Die Motivation ein solches räumlich inhomogenes Feld zu betrachten ist, eventuell auftretende Effekte aufgrund dieser Inhomogenität, zu untersuchen. In mikroskopischer Form kann es zum auftreten solcher Felder innerhalb eines Hochintensitätslasers kommen. Außerdem treten im Rahmen eines Experiments immer lokale Inhomogenitäten auf, so dass die Annahme eines konstanten Feldes lediglich eine idealisierte Vorstellung ist. Eine erste Betrachtung des Feldes zeigt, dass dieses nach Gleichung (3.18), im periodischen Abständen zwischen der maximalen $B_1 + B_0$ und der minimalen $B_0 - B_1$ Feldstärke wechselt, wobei die Phasengeschwindigkeit in einer lokal-konstanten Betrachtung nach Gleichung (3.21) ein entsprechendes Verhalten aufweisen wird. Für die Weltlinienrechnungen soll die maximale Feldstärke mit $eB_1 = 0.5 \cdot eB_0$ ($eB_0 = 0.2$) sowie der Impulsvektor des einfallenden Photons mit $k = (0, 0.1, 0, 0.1)$ gewählt werden. In Abbildung 3.7(b) ist zu

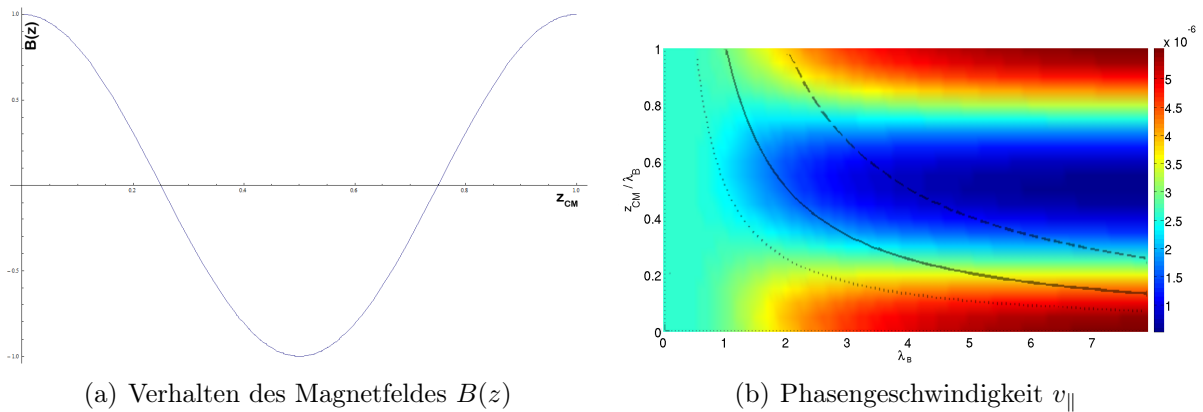


Abbildung 3.7.: Phasengeschwindigkeit $v_{||}$ im oszillierenden Magnetfeld $eB(z)$ für verschiedene Wellenlängen λ_B und Massenschwerpunkte z_{CM} für ein statistisches Ensemble von 40000 Weltlinien.

erkennen, dass das Verhalten der Phasengeschwindigkeit bei großen Wellenlängen λ_B , das heißt einem räumlich langsam veränderlichen Feld, wie erwartet dem Verlauf des lokal-konstanten Feldes entspricht. Jedoch ist in der Abbildung ebenfalls ersichtlich, dass der Bereich auf Skala der Comptonwellenlänge $\lambda_B = 1.0$ in der gewählten Auflösung keine Informationen wiedergibt und noch einmal gesondert betrachtet werden sollte. In Abbildung 3.7 ist die parallele Komponente der Phasengeschwindigkeit $v_{||}$ dargestellt, wobei

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

der Winkel zwischen der Propagationsrichtung des einfallenden Photons und der Richtung des externen Magnetfeldes $\theta = \pi/2$ beträgt. In Abbildung 3.7(b) sind außerdem noch einmal mit schwarzen Linien die Schnitte für $z_{\text{CM}} = (0, 1.0, 2.0)\lambda_B\pi$ gekennzeichnet, die in Abbildung 3.8 gesondert dargestellt sind. Es zeigt sich somit, dass im Fall

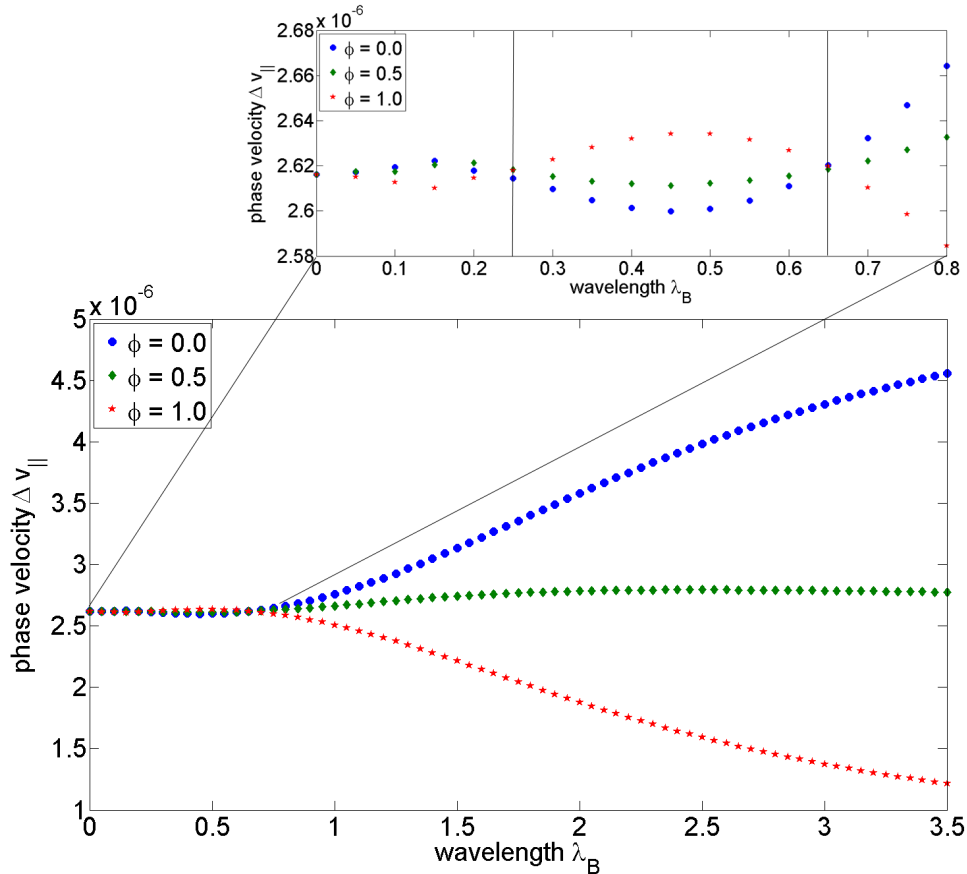


Abbildung 3.8.: Phasengeschwindigkeit $v_{||}$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ_B für verschiedenen Phasen $\phi = \frac{2\pi}{\lambda_B} z_{\text{CM}}$. Die physikalischen und statistischen Parameter sind dabei analog zu Abbildung 3.7 gewählt worden. Für den Bereich kleiner Wellenlängen wurden die Resultate noch einmal in einer kleineren Abbildung separat dargestellt.

eines langsam veränderlichen Magnetfeldes das einfallende Photon nur wenig von dem räumlich oszillierenden Verhalten des Feldes sieht und somit eine lokal konstante Näherung des magnetischen Feldes eine gute Approximation liefert. In physikalischer Hinsicht lässt das Verhalten der Phasengeschwindigkeit $v_{||}$ in Abbildung 3.7, für eine bestimmte Wellenlänge λ_B , auf eine fokussierende Eigenschaft des Feldes schließen. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Phasengeschwindigkeit und Brechungsindex n folgt aus diesen ersten Rechnungen, dass für große Wellenlängen λ_B der Brechungsindex mit ansteigenden ϕ zunächst abfällt und somit die Photonen nach dem snelliusschen Brechungsgesetz zu Starkfeldregionen hingebogen werden. Nähert man sich jedoch einer Wellenlänge $\lambda_B \approx 1$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

an, so verstärkt sich zunehmend der oszillierende Feldcharakter, weshalb in diesem Parameterbereich das einfallende Photon einen deutlichen Einfluss der Inhomogenität registrieren sollte. Für große Feldwellenlängen $\lambda_B \gg 1$ liegt außerdem der statistische Fehler der Numerik deutlich unterhalb des zu erkennenden oszillierende Verhaltens von Δv_{ph} . Eine genauere Betrachtung des Parameterbereiches auf Skala der Comptonwellenlänge

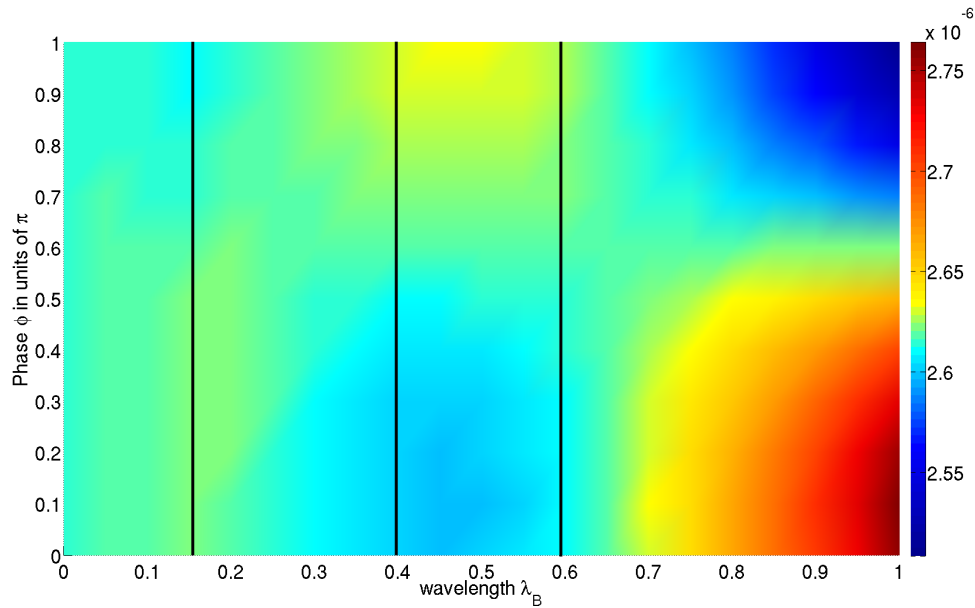


Abbildung 3.9.: Phasengeschwindigkeit v_{\parallel} im oszillierenden Magnetfeld $eB(z_{\text{CM}})$ für verschiedene Wellenlängen λ_B und z_{CM} für ein statistisches Ensemble von 40000 Weltlinien.

ist in Abbildung 3.9 geschehen. Es ist zu erkennen, dass das periodische Verhalten bei $\lambda_B = 0.65$ in Abhängigkeit vom gewählten Massenschwerpunkt z_{CM} nicht mehr vorhanden ist und sich dieses bei $\lambda_B = 0.45$ sogar umgekehrt hat. Konvergiert die Feldwellenlänge gegen $\lambda_B = 1.0$ so kommt es zunächst zu einer Verringerung des oszillierenden Verhaltens der Phasengeschwindigkeit und anschließend bei Wellenlängen deutlich unterhalb der Comptonwellenlänge $\lambda_B \ll 1.0$ zu einem neuartigen defokussierenden Effekt. Genauer ist darunter zu verstehen, dass sich die Phasengeschwindigkeit genau umgekehrt zu dem Parameterbereich großer Wellenlängen verhält und die Photonen somit im Bereich der Comptonwellenlänge von Starkfeldregionen weg gebeugt werden. Diese Beobachtung ist nicht mehr durch eine approximative Behandlung in einer lokal-konstanten Näherung erklärbar und lässt auf einen reinen Effekt der räumlichen Inhomogenität schließen. In Abbildung 3.8 ist außerdem die Ausprägung der Extrema für große und kleine Wellenlängen explizit dargestellt. Dabei beträgt der Unterschied zwischen Maximum und Minimum für $\lambda_B \ll 1.0$ gerade einmal $\Delta v_{\text{max}} - \Delta v_{\text{min}} \approx 0.04 \cdot 10^{-6}$, was unterhalb des statistischen Fehlers liegt, womit die Ergebnisse durch eine Änderung der statistischen Parameter ab-

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

gesichert werden müssen. Diese Vorgehensweise war notwendig um sicherzustellen, dass es sich bei der Beobachtung nicht um einen statistischen Effekt handelt. Hierzu haben wir die Ensemble durch Variation des Initialisierungswertes (Seed-Wert) verändert und die Rechnung für unterschiedliche Ensemble erneut durchgeführt. Es zeigte sich das auch bei Veränderung der Statistik, das defokussierende Verhalten bei kleinen Wellenlängen erhalten bleibt, weshalb es sich tatsächlich um einen physikalischen Effekt handelt, der auf Quantenfluktuationen im räumlich inhomogenen Magnetfeld zurückgeht. Dieser ist jedoch im Gegensatz zu dem Verhalten bei großen Feldwellenlängen λ_B ($\Delta v_{max} - \Delta v_{min} \approx 3.0 \cdot 10^{-6}$) stark unterdrückt. Eine genauere Untersuchung des oszillierenden Verhaltens der Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von $\phi = 2\pi z_{CM}/\lambda_B$ zeigt außerdem eine 2π -Periodizität, die für kleine Wellenlängen einen Offset von $\phi_0 = \pi$ besitzt. Die numerischen Resultate der Weltliniensimulation lassen sich im Nachfolgenden auch mit einer Fitfunktion für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph,Fit}(z_{CM}) = A \cos\left(\frac{2\pi z_{CM}}{\lambda_B} - \phi_0\right) + \Delta v_0 \quad (3.22)$$

auswerten. Die Ergebnisse des Fits sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Wellenlänge λ_B	Amplitude A	ϕ_0/π	Verschiebung von v_{ph} Δv_0
0.15	$7.36 \cdot 10^{-9} \pm 2.5 \cdot 10^{-9}$	0.31 ± 0.30	$2.62 \cdot 10^{-6} \pm 3.4 \cdot 10^{-8}$
0.40	$1.61 \cdot 10^{-8} \pm 4.8 \cdot 10^{-8}$	$1.09 \pm 5.4 \cdot 10^{-1}$	$2.62 \cdot 10^{-6} \pm 5.1 \cdot 10^{-8}$
0.60	$8.66 \cdot 10^{-9} \pm 3.4 \cdot 10^{-8}$	$1.13 \pm 6.8 \cdot 10^{-1}$	$2.62 \cdot 10^{-6} \pm 5.1 \cdot 10^{-8}$
2.00	$8.52 \cdot 10^{-7} \pm 2.1 \cdot 10^{-7}$	$0.02 \pm 3.0 \cdot 10^{-2}$	$2.74 \cdot 10^{-6} \pm 3.8 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 3.2.: Ergebnisse des Fits nach Gleichung (3.22) für verschiedene Wellenlängen λ_B der numerischen Resultate aus Abbildung 3.9.

Es ist zu erkennen, dass bei einer Wellenlänge von $\lambda_B = 0.15$ die Phasenverschiebung mit $\phi_0/\pi = 0.31 \pm 0.3$ im Rahmen des numerischen Fehlers ungefähr null beträgt und bei den Wellenlängen $\lambda_B = 0.4, 0.6$ auf $\phi_0/\pi \approx 1$ springt. Für λ_B oberhalb der Comptonwellenlänge geht diese Verschiebung wieder auf null zurück. In Abbildung 3.10 sind die mit Hilfe der Amplitude A normalisierten Phasengeschwindigkeiten $\Delta v_{ph,\parallel}$ für verschiedene Wellenlängen λ_B dargestellt. Es ist darin noch einmal deutlich der mit Hilfe der Gleichung (3.22) bestimmte Shift ϕ_0/π für die beiden Wellenlängen $\lambda_B = 0.4, 0.6$ zu erkennen. Die Schnitte entsprechen dabei den vertikalen Linien aus der Konturdarstellung in Abbildung 3.9. In der Darstellung 3.10 ist auch ein Schnittpunkt bei $\lambda_B \approx 0.65$ ersichtlich, bei den schon ein defokussierender Effekt festgestellt worden ist. Diese Ergebnisse

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

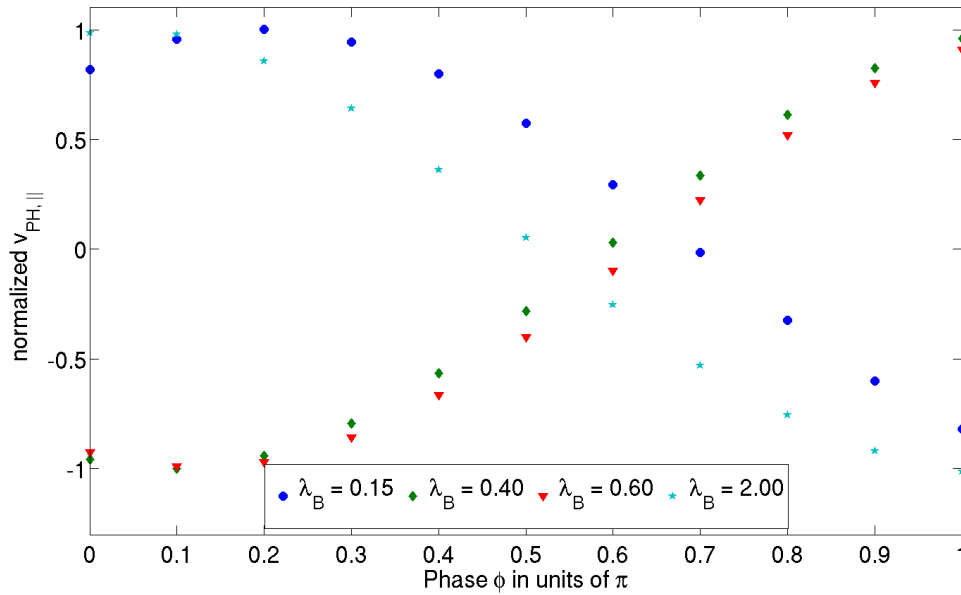


Abbildung 3.10.: Normalisierte Phasengeschwindigkeit $\Delta v_{\text{ph},||}$ für verschiedene Wellenlängen $\lambda_B = 0.15, 0.4, 0.6, 2.0$. Die Funktionen entsprechen dabei den in Abbildung 3.9 dargestellten vertikalen Linien bei den entsprechenden Wellenlängen.

belegen noch einmal die Beobachtungen in dem betrachteten Parameterbereich und zeigen, dass bei Wellenlängen $\lambda_B = 0.15$ ein ähnliches Verhalten wie bei $\lambda_B = 2.0$ auftritt, wo das Vakuum selbst-fokussierende Eigenschaften hat. In schnell veränderlichen Feldern zeigt der magnetischen Brechungsindex des Vakuums eine nicht-monotone Abhängigkeit von lokaler Feldstärke $eB(z_{\text{CM}})$. Dieses neue Verhalten kann in geometrischer Hinsicht innerhalb des Weltlinienbildes verstanden werden, als Weltlinien mit ihrer räumlichen Erweiterung auf die nicht-lokale Struktur der Quantenfeldtheorie. Lokale Werte des Brechungsindex erfahren somit Beiträge von in der Nähe liegenden Extrema in der Feldstärke. Dieser inhärente Mittelungsmechanismus lässt auf eine nicht-monotone Eigenschaft des Brechungsindex schließen. Für die Lichtausbreitung kann dies eine natürliche Grenze der selbstfokussierenden Eigenschaften des Quantenvakuums darstellen.

3.5. Reflexion eines Photons im räumlich inhomogenen Magnetfeld

Im vorangegangenen Abschnitt konnten wir zeigen, dass das Quantenvakuum durch die Wechselwirkung mit einem starken externen Magnetfeld, wie es unter anderem in einem Laserfeld auftreten kann, Eigenschaften von Materie annimmt. Dabei haben wir einen

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

defokussierenden Effekt festgestellt, der bei einem Feldprofil nach Gleichung (3.18) auf Skala der Comptonwellenlänge λ_C auftritt. Nun ist es an modernen Laseranlagen möglich, durch Fortschritte in Detektionstechniken bei Hochintensitätslasern, wie Polarimeter [78; 79] oder Single-Photon Detektion, das Propagationsverhalten einzelner Strahlungsphotonen bei Wechselwirkung mit dem Quantenvakuum zu untersuchen. Eine weitere interessante nicht-lineare Eigenschaft des Vakuums in diesem Zusammenhang ist, dass bei Wechselwirkung mit einem starken externen Feld dieses verändert werden und somit als effektives Potentials für die propagierenden Photonen interpretiert werden kann. Der dabei auftretende Effekt der Reflexion eines Strahlungsphotons an einer Potentialbarriere wird auch als Quantenreflexion [57; 80] bezeichnet. Im Nachfolgenden soll dieser Streuungseffekt eines Photons mit dem Impuls k_{in} , der sich durch den räumlichen Impuls \vec{k}_{in} und der Energie ω_{in} auszeichnet, an einem lorentzartigen Feldprofil nach Gleichung 3.19 betrachtet werden. Dabei kommt es zur Reflexion $k_{2,out}$ oder Transmission $k_{1,out}$ dieses

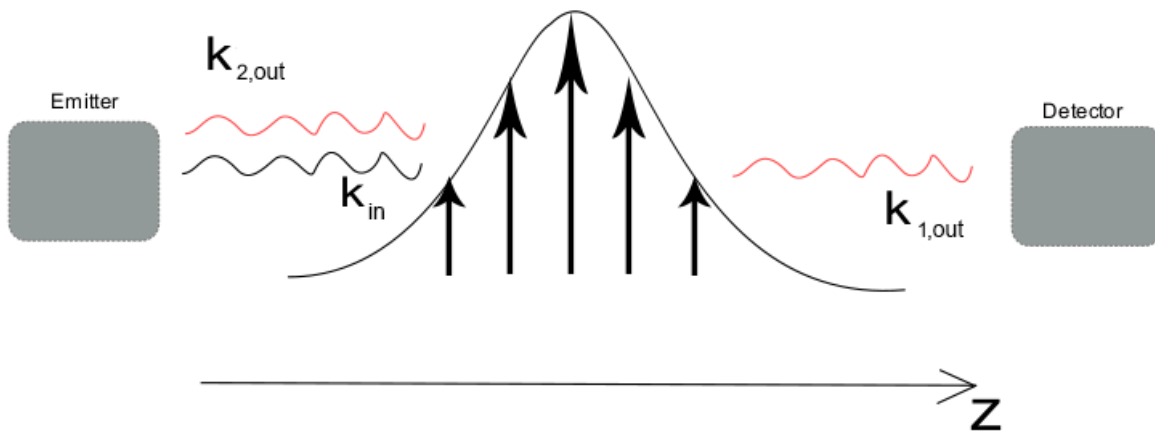


Abbildung 3.11.: Streuung eines Photons an einem Magnetfeld mit lorentzartiger Inhomogenität (symbolisiert durch schwarze Pfeile) nach Gleichung (3.19). Das einfallende Photon k_{in} kann dabei zum einen reflektiert $k_{2,out}$ werden oder propagiert in die gleiche Richtung wie das einfallende Photon weiter $k_{1,out}$.

Photons. Das Feldprofil wird im Weiteren durch:

$$B(z) = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z+z_{CM}}{\lambda_B} \right)^2} \quad (3.23)$$

definiert, wobei λ_B die Breite des Feldes in Einheiten der Comptonwellenlänge darstellt. Genauer beschreibt λ_B die Ausdehnung der Inhomogenität, die die Eigenschaft besitzt, dass diese für $z + z_{CM} = \lambda_B$ auf $(1/2)B_0$ abgefallen ist. Das Feld selbst zeige in $\vec{e}_1(x)$ -Richtung und besitze eine Inhomogenität in $\vec{e}_3(z)$ -Richtung. Für die 2-Punkt Funktion

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

$\Pi_{2P,i}$ mit $i = \{||, \perp\}$ im Impulsraum in Abhängigkeit vom Vektor des Impulsübertrags $k_3 = k_{in,z} + k_{out,z}$ ergibt sich somit:

$$\Pi_{2P,i}[k_3, eB_0, \lambda_B] = \int_{-\infty}^{\infty} d^D x_{\text{CM}} \Pi_{2P,i}[z_{\text{CM}}, eB_0, \lambda_B] e^{i \cdot (k_{in,z} + k_{out,z}) \cdot x_{\text{CM}}} \quad (3.24)$$

wobei die Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{\text{CM}}, eB_0, \lambda_B]$ mit Hilfe des Weltlinienformalismus bestimmt wird. Da in dem von uns betrachteten Fall das Feld nur eine räumliche Inhomogenität in \vec{e}_3 -Richtung besitzt, ist es möglich das Integral über den Massenschwerpunkt x_{CM} für die restlichen Komponenten exakt zu bestimmen. Hierbei gilt für die Raumzeitrichtungen x^μ , in die das Feld keine Inhomogenität aufweist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{\mu, \text{CM}} e^{i \cdot (k_{\mu, in} + k_{\mu, out}) \cdot x_{\text{CM}}^\mu} = 2\pi \cdot \delta(k_{\mu, in} + k_{\mu, out}).$$

Dies ist ähnlich der Vorgehensweise bei der Bestimmung von Gleichung (3.3), wobei der Faktor $(2\pi)^3$ im Ortsraum für die restlichen Komponenten der Schwerpunktsfixierung zu berücksichtigen ist. Mit Anwendung der Integration über x_{CM}^μ verbleibt in

$$\Pi_{2P,i}[z_{\text{CM}}, eB_0, \lambda_B] = \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \{ \langle \dots \rangle_i - a_i T^2 - b_i T^3 \}, \quad (3.25)$$

somit nur noch ein eindimensionales Integral über z_{CM} , das mit Hilfe einer numerischen Fourierintegration gelöst werden kann. In Gleichung (3.25) beschreibt $\langle \dots \rangle_i$ den Integranden $\delta\Pi_{2P,i}$ der eine Divergenz für kleine Eigenzeiten T besitzt, die durch Einführung von Countertermen aus der Entwicklung um kleine Eigenzeiten (Heat-Kernel Entwicklung) beseitigt werden kann. Die einzelnen Counter- und Entwicklungsterme werden analog zu den früheren Betrachtungen mit $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ bezeichnet und in der Numerik mit Hilfe eines *non-linear-least-square*-Verfahrens bestimmt. Im ersten Schritt ist es sinnvoll das Magnetfeld $B(z)$ in einer lokal-konstanten Näherung zu betrachten. Dabei besitzt diese Näherung eine Abhängigkeit vom lokalen Betrachtungspunkt z_{CM} (Massenschwerpunkt) und der Wellenlänge λ_B :

$$B_{\text{lokal}}(z_{\text{CM}}) = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z_{\text{CM}}}{\lambda_B} \right)^2}. \quad (3.26)$$

In Abbildung 3.12 ist für Wellenlängen unterhalb der Comptonwellenlänge λ_C ein lorentzförmiger Abfall von $eB_{\text{max}} = 0.2$, was dem Maximum bei $z_{\text{CM}} = 0$ entspricht, auf Feldstärken unterhalb 25% eB_{max} für ansteigendes z_{CM} zu erkennen. Für Wellenlängen

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

oberhalb der Comptonwellenlänge λ_C hingegen reicht der gewählte Parameterbereich nicht aus, um das lorentzförmige Verhalten des Feldes darzustellen. Da am Ende der Simulation eine Fouriertransformation über die Schwerpunktskoordinate z_{CM} erfolgen soll, muss der Parameterbereich so gewählt werden, dass das Verhalten des Feldes, also die vollständige lorentzförmige Struktur, eindeutig in die numerische Simulation der 2-Punkt Korrelationsfunktion $\Pi_{2P,i}$ eingeht. Aus diesem Grund wird der Parameterbereich in Abhängigkeit

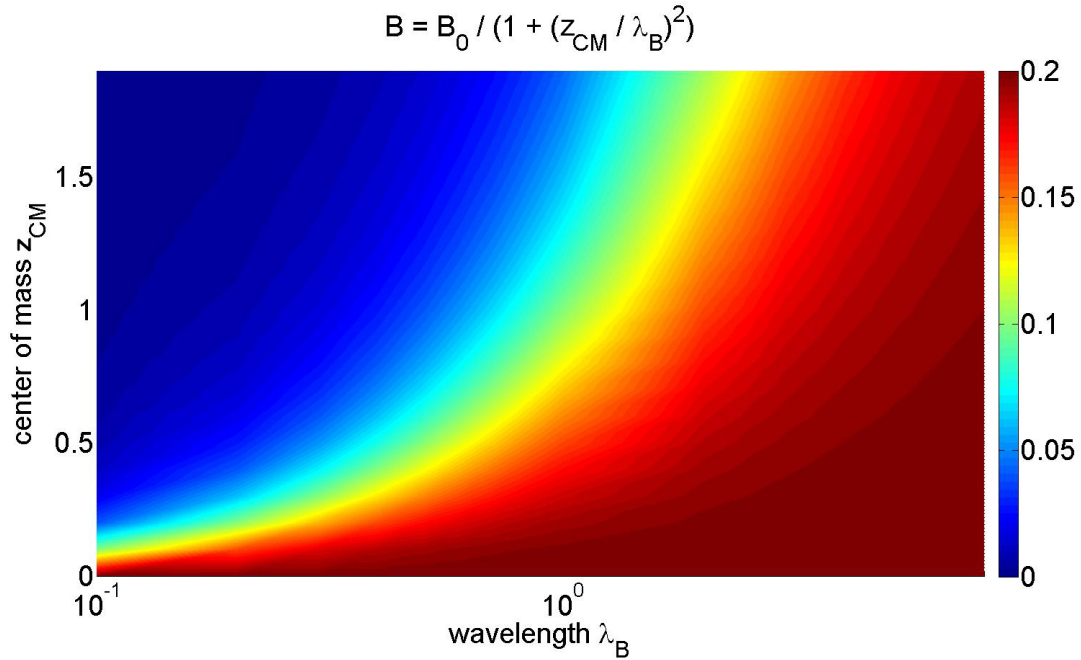


Abbildung 3.12.: Lokale Feldnäherung nach Gleichung (3.26) in Abhängigkeit vom Massenschwerpunkt z_{CM} und der Wellenlänge λ_B .

von der Wellenlänge λ_B automatisch in den Grenzen $z_{\text{CM}} \in (0, 10 \cdot \lambda_B)$ festgelegt. Im ersten Schritt soll der Reflexionskoeffizient R bestimmt werden. Hierzu wurde für das einfallende Photon k_{in} der Photonenvektor mit:

$$k_{in} = (0, 0, k_{in,z}, \omega_{in})$$

und $k_{in,z} = \omega_{in} = 0.1$ festgelegt. Außerdem soll es sich bei dem einfallenden Photon um ein on-shell Photon handeln ($k_{in}^2 = 0$), was durch die Wahl der Parameter $k_{in,z}$ und ω_{in} erfüllt wird. Diese Bedingung muss für das gestreute Photon in der Nähe des externen Feldpulses nicht zwangsläufig zutreffen. Wir wollen dieses Photon zunächst in großer Entfernung vom Feld betrachten, weshalb die Impulserhaltung gilt und es sich um ein on-shell Photon handelt. Der entsprechende Vektor wurde somit mit:

$$k_{out} = (0, 0, k_{out,z}, \omega_{out}) = (0, 0, \pm k_{in,z}, \pm \omega_{in})$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

gewählt. Betrachtet man die Gleichung (3.24) so ist zu erkennen, dass aufgrund der Zeitunabhängigkeit des Magnetfeldes sich das Zeitintegral zu $\delta(\omega_{in} + \omega_{out})$ ergibt und die Energieerhaltung für den Fall $\omega_{in} = -\omega_{out}$ erfüllt ist. Zur Berechnung des entsprechenden Reflexionskoeffizienten sollte somit auf jedem Fall die Bedingung der Energieerhaltung erfüllt werden. Des Weiteren kommt es im Grenzfall von homogenen Feldern (konstantes Magnetfeld) zu keiner Reflexion eines Photons, weil $\Pi_{2P,i}[\dots] \neq f(z_{CM})$ und somit $R = 0$. In diesem Fall lässt sich das entsprechende Integral ebenfalls lösen und es ergibt sich für die Transmission eines Photons die Impulserhaltung $k_{in,z} = -k_{out,z}$. Hingegen ist ein reflektiertes Photon charakterisiert durch einen Impulsvektor der Form:

$$k_{out} = (0, 0, k_{in,z}, -\omega_{in}).$$

3.5.1. Bestimmung des Reflexionskoeffizient R

Zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten R , ist die Betrachtung der Stromdichte $j(r)$ des induziert auslaufenden Photons notwendig [57]. Die Stromdichte definiert sich dabei über:

$$j(r) = - \int_{-L}^{\infty} dr' \Pi_{2P,i}[r, r'] \cdot A_{in}(r')$$

wobei L die Position von Emitter (und Detektor) auf der negativen optischen Achse bezeichnet und das Feld $A_{in}(r')$ des einfallenden Photons durch eine ebene Welle der Form:

$$A_{in}(r') = a(\omega) e^{i\omega r'}$$

modelliert werden kann. Das reflektierte Photonenfeld A_{ref} ergibt sich nun durch Integration der Stromdichte $j(r)$ längs der optischen Achse, die mit der Koordinate r parametrisiert ist und der durch eine Länge L nach unten begrenzt ist, zu:

$$A_{ref} = \frac{i}{2\omega} \int_{-L}^{\infty} dr j(r) e^{-i\omega(r''-r)}.$$

Für den Reflexionskoeffizienten ergibt sich daraus im Limes $L \rightarrow \infty$:

$$R = \lim_{L \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{ref}}{A_{in}} \right|^2 = \frac{1}{4\omega^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dr' e^{i\omega r} \Pi_{2P,i}(r, r') e^{i\omega r'} \right|^2.$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

Nach der vorangegangenen Definition der Funktion $\Pi_{2P,i}[k_3, eB_0, \lambda_B]$ folgt für den Fall einer Transmission, dass gelten muss $k_{3,ref} = k_{3,in} + k_{3,out} = 0$. Das heißt, es gilt in diesem Fall Impulserhaltung, wohingegen sich im Fall der Reflexion der Vektor $k_{3,ref}$ zu $k_{3,ref} = 2 \cdot k_{3,in}$ und somit der Reflexionskoeffizient zu:

$$R(eB_0, \lambda_B) = \left| \frac{\Pi_{2P,i}[k_{3,ref} = 2k_{3,in}, eB_0, \lambda_B]}{2\omega} \right|^2$$

ergibt. Im Folgenden soll der Impulsübertrag $k_{3,ref}$ kürzer durch k_3 beschrieben werden. Im Rahmen der Weltliniennumerik wird somit in folgenden Schritten vorgegangen:

1. Bestimmung der Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ mit Hilfe des Weltlinienformalismus.
2. Vergleich der numerisch bestimmten Counter- und Korrekturterme mit denen in der lokal-konstanten Feldnäherung analytisch berechneten, zur Bewertung des numerischen Algorithmus. Hierzu wird der Vergleich auf den Korrekturterm c_i beschränkt, weil dieser in der niedrigsten Ordnung eine Feldabhängigkeit aufweist.
3. Ausführung der Fouriertransformation mit Hilfe der numerischen Methode der FFT.

Um die Counter- und Korrekturterme $\{a_i \dots d_i\}$ zu bestimmen, verwenden wir wiederum das nonlinear-least-square-Verfahren. Dazu werden die numerischen Resultate der Funktion $\delta\Pi_{2P,i}$, die sich durch Anwendung der Projektoren $P_i^{\mu\nu}$ auf die Funktion

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{2P}^{\mu\nu} = T \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \left\{ \dot{y}_1^\mu e^{i\sqrt{T}k_1 y_1} \dot{y}_2^\nu e^{i\sqrt{T}k_2 y_2} \right\} \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{y}^2 \right) \\ \times \exp \left(-ie \int_0^1 d\tau \dot{y} A(\sqrt{T}y + x_{CM}) \right) \end{aligned}$$

ergeben, an die analytische heat-kernel Entwicklung angefügt. In der lokal konstanten Näherung hängt das Feld nach Gleichung (3.26) von den beiden Parametern z_{CM} und λ_B ab. Somit müssen die entsprechenden Counter- und Korrekturterme für jede Funktion $\delta\Pi_{2P,i}(\dots, z_{CM}, \lambda_B)$ separat bestimmt werden. Betrachtet man nun einen Parameterbereich analog zu Abbildung 3.12, folgt für die einzelnen Terme eine entsprechende Darstellung, was in den Abbildungen 3.13(a) und 3.13(b) mit dem Verhältnis zwischen Weltlinienergebnis des Korrekturterms $c_i[x_{CM}, \lambda_B]$ und dem analytisch zu erwartenden Korrekturterm im Parameterbereich wie Abbildung 3.12 zu erkennen ist. Aus den Abbildungen folgt, dass es für Wellenlängen unterhalb der Comptonwellenlänge λ_C zu einer großen Abweichung zwischen Weltliniennumerik und Lokal-konstanter Näherung kommt, was daran zu erkennen ist, dass das Verhältnis deutlich von 1 abweicht. Dies lässt darauf

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

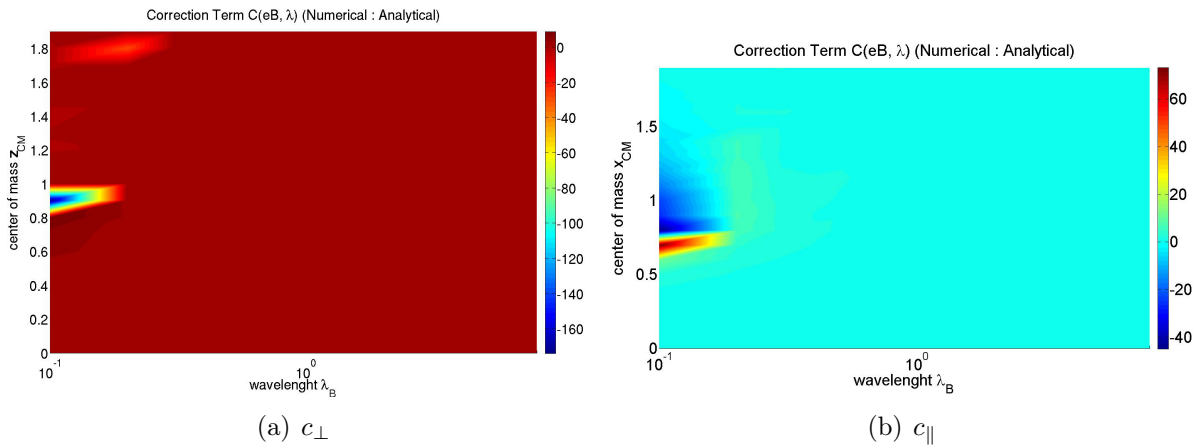


Abbildung 3.13.: Verhältnis des numerischen und analytischen Ergebnisses des Korrekturterms $c_{\perp, \parallel}$ im Fall der senkrechten Polarisation bei 40000 Weltlinien und einem Photonenvektor $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ bei einer maximalen Feldstärke von $eB_0 = 0.2$. Man erkennt, dass für kleine Wellenlängen der entsprechende numerische Korrekturterm stark von der analytischen Vorhersage abweicht.

schließen, dass die numerischen Resultate in diesem Parameterbereich nur bedingt eine zuverlässige Aussage liefern und sehr stark durch statistisches Rauschen beeinflusst werden. Eine Erklärung für diesen Sachverhalt ist in Abbildung 3.12 zu erkennen, wo das magnetische Feld genau in dem zu betrachtenden Parameterbereich gegen null konvergiert. Das bedeutet gleichzeitig, dass sich das zu erwartende Signal der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,i}$ dem Vakuumsignal annähert und damit gegen null konvergiert. Der statistische Fehler des numerischen Algorithmus ist in diesem Parameterbereich entsprechend groß. Zur Ermittlung dieses Fehlers wurde die Simulation ebenfalls wie in früheren Simulationen für fünf unterschiedliche Ensemble durchgeführt, womit sich eine statistische Auswertung der Daten durchführen lässt. Dabei ist zu erkennen, dass der Fehler für kleiner werdende Wellenlängen gegen 100% und schlechter konvergiert, jedoch im Wellenlängenbereich oberhalb von $\lambda_C = m^{-1}$ auf Werte unterhalb von 1% abfällt. Um den Einfluss der Ensemblegröße zu untersuchen, wurden die Rechnungen noch einmal für 200000 Weltlinien durchgeführt und analog zu den Vorherigen in einem Parameterplot dargestellt (Abbildung 3.14). Es ist im Vergleich zu Abbildung 3.13(a) zu erkennen, dass eine Vergrößerung der Statistik nur bedingt Einfluss auf den Bereich kleiner Wellenlängen besitzt und nach wie vor eine Abweichung zwischen Weltliniennumerik und lokal-konstanter Näherung vorliegt. Dies ist jedoch nicht weiter verwunderlich, da wir mit einer endlichen Statistik arbeiten und diese gerade im Bereich kleiner Wellenlängen deutlich vergrößert werden müsste. Im nächsten Schritt sollen die Ergebnisse der Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ für ein räumlich inhomogenes Magnetfeld betrachtet werden. Da in diesem Fall keinerlei theoretische Vergleichswerte vorliegen ist das Verständnis der Ergebnisse aus den Simulationen für den Korrekturterm

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

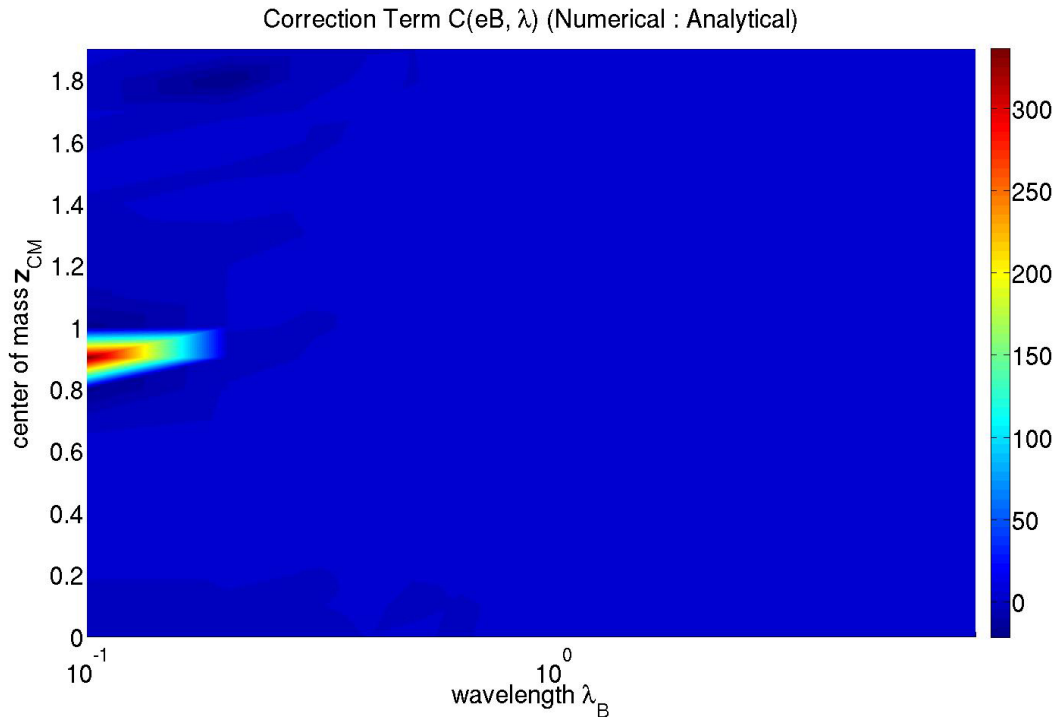


Abbildung 3.14.: Verhältnis des numerischen und analytischen Ergebnisses des Korrekturterms c_{\perp} im Fall der senkrechten Polarisierung bei 200000 Weltlinien und einem Photonenvektor $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ bei einer maximalen Feldstärke von $eB_0 = 0.2$. Man erkennt, dass für kleine Wellenlängen der entsprechende numerische Korrekturterm stark von der analytischen Vorhersage abweicht, diese jedoch zu den Rechnungen mit 40000 Weltlinien deutlich geringer ist.

c_i von zentraler Bedeutung. In Abbildung 3.12 ist zu erkennen, dass mit größer werden der Wellenlänge λ_B und konstant gehaltenem Massenschwerpunkt z_{CM} die lorentzförmige Struktur des Feldes zunehmend nicht mehr erfasst wird. Somit muss im Rahmen der Numerik zunächst eine automatische Anpassung des Parameterbereiches vorgenommen werden. Hierzu betrachten wir die 2-Punkt Funktion in einem Bereich

$$z_{CM} \in [-10 \cdot \lambda_B, 10 \cdot \lambda_B], \quad (3.27)$$

womit sich für die lokale Feldnäherung der Ausdruck:

$$B_{\text{local}} = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z_{CM}}{\lambda_B}\right)^2} = \frac{B_0}{1 + n^2} \quad n \in [-10, 10]$$

ergibt. Zunächst soll der Algorithmus in einer ersten zwar unphysikalischen aber numerisch kontrollierbaren Simulation getestet werden, wozu wir den Vektor des einfallenden Photons mit $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und den des gestreuten Photons mit $k_{out} = (0, 0, -0.1, 0.1)$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

gewählt haben. Die Simulation ist unphysikalisch, weil diese Wahl der Photonenvektoren die Energieerhaltung verletzt. Die entsprechende Fouriertransformation in der Zeitkomponente x_4 mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \Pi_{2P}[z_{\text{CM}}, \dots]$$

liefert für die auslaufenden Amplituden einen verschwindenden Beitrag. Dennoch kann mit diesem unphysikalischen Fall die Numerik gut getestet werden. Erst zum Schluss soll der für uns physikalisch relevante Fall, der zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten R benötigt wird, untersucht werden. In den einzelnen Rechnungen soll außerdem die Feldstärke mit $eB_0 = 0.2$ deutlich unterhalb der kritischen Feldstärke liegen. In Abbildung 3.15 sind die Ergebnisse für die 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{\text{CM}}, \dots]$ in einem Wellenlängenbereich $\lambda_B \in [0.1, 19]$ dargestellt, wobei die Angabe in Einheiten der Comptonwellenlänge $\lambda_C = m^{-1} \equiv 1$ zu verstehen ist. Die Simulation selbst wurde mit einem Ensemble von

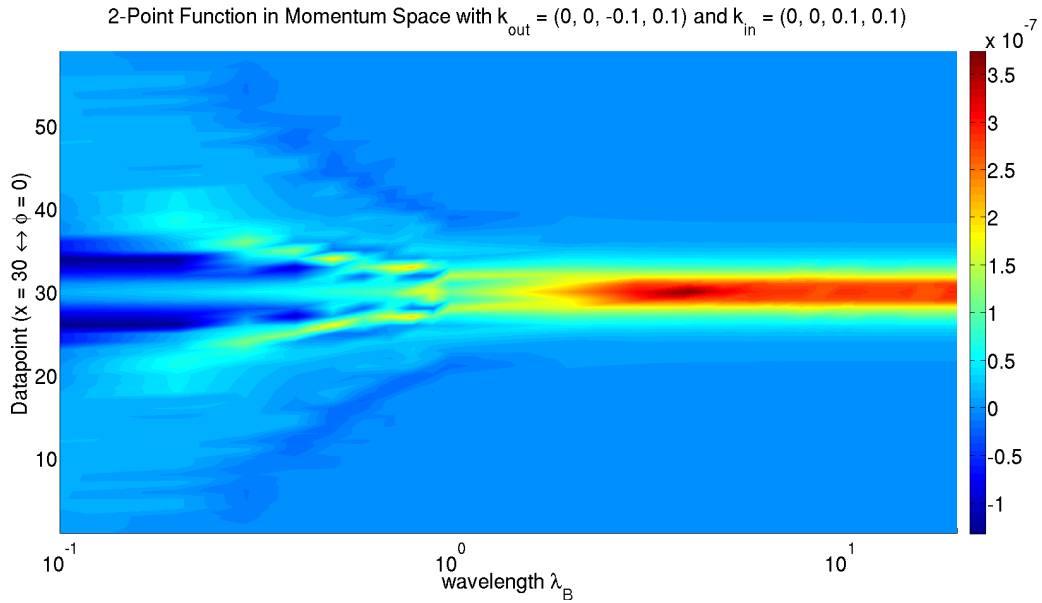


Abbildung 3.15.: 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{\text{CM}}, \dots]$ für ein Weltlinienensemble mit 40000 Weltlinien bei einer maximalen Feldstärke von $eB_0 = 0.2$. Für das einfallende Photon wurde ein Vektor von $k_{\text{in}} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und entsprechend für das gestreute $k_{\text{out}} = (0, 0, -0.1, 0.1)$ gewählt. Die y -Skalierung wird dabei gemäß der Gleichung (3.27) dynamisch in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ_B angepasst. Die Anzahl der Datenpunkte liegt dabei bei $x = 59$, wobei der Punkt ϕ bei $x = 30 = 0 \equiv z_{\text{CM}}$ zu finden ist.

40000 Weltlinien durchgeführt, wobei die Ergebnisse noch einmal über 5 verschiedene Ensemble mit unterschiedlichen Initialisierungswerten (Seed) gemittelt worden sind. Man erkennt in der Abbildung 3.16, dass für Wellenlängen unterhalb der Comptonwellenlänge,

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

dass heißt für $\lambda_B \leq 1.0$, die Weltlinienresultate einen großen statistischen Fehler aufweisen. Genauer ist in Abbildung 3.16 der Einfluss des statistischen Fehlers der Weltlinien-

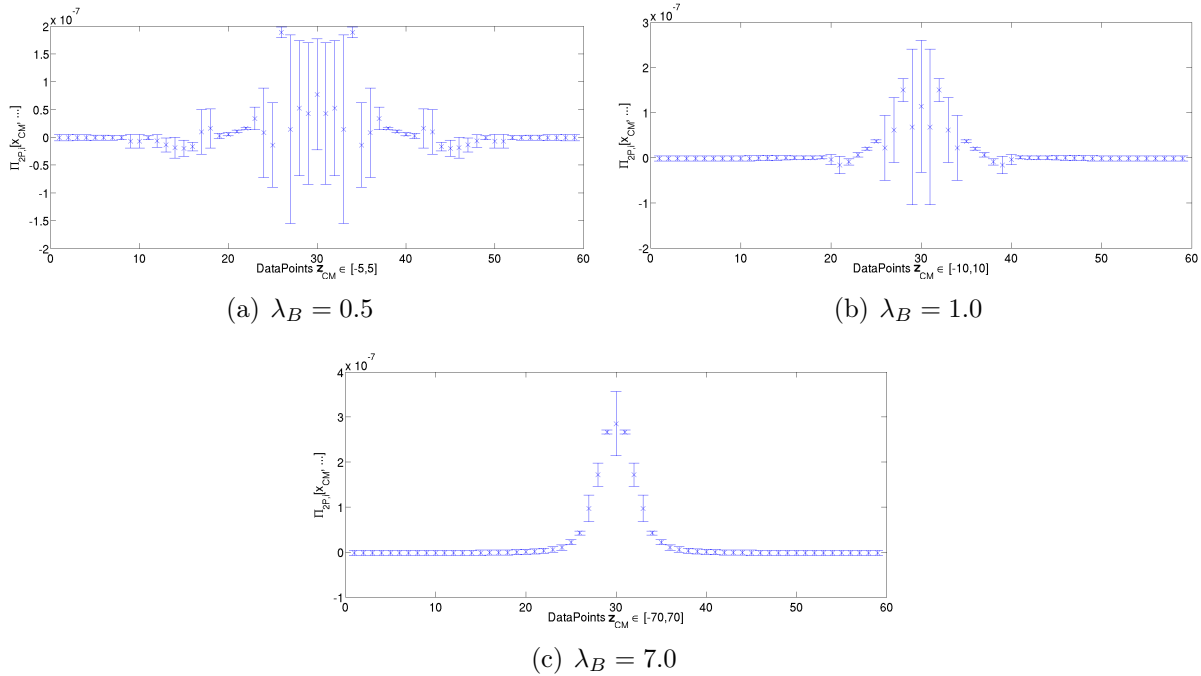


Abbildung 3.16.: Entwicklung des statistischen Fehlers der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ in Abhängigkeit von λ_B bei einem Ensemble von 40000 Weltlinien. Die maximale Feldstärke liegt bei $eB_0 = 0.2$ und einem einfallenden Photon von $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$. In den einzelnen Abbildungen ist ebenfalls zu erkennen, dass das Signal für $z_{CM} \neq 0$ sehr schnell auf null abfällt.

rechnung in Abhängigkeit von der Feldbreite λ_B für ein Ensemble von 40000 Weltlinien dargestellt. Dabei sind die jeweiligen Ergebnisse der Simulation für $\Pi_{2P,i}[z_{CM}, \dots]$ über die Weltlinienfixierung z_{CM} aufgetragen, die wiederum abhängig von der jeweils gewählten Feldbreite λ_B ist und in einem Bereich nach (3.27) liegt. Die anderen physikalischen Parameter sind analog zu Abbildung 3.15 gewählt worden. Es zeigt sich vor allem in Abbildung 3.16(a), dass für Wellenlängen unterhalb der Comptonwellenlänge λ_C die Amplitude der physikalischen Werte deutlich unterhalb des numerischen Fehlers liegt und diese somit keine Aussagekraft besitzen. Erst für Wellenlängen oberhalb von λ_C , was in Abbildung 3.16(c) zu erkennen ist, ist die Struktur der Kurve über z_{CM} deutlich größer als die statistische Streuung der einzelnen Messwerte. Auch eine Vergrößerung der Statistik auf 200000 Weltlinien (Abbildung 3.17) kann die statistischen Fehler nicht soweit verringern, dass eine klare Struktur im Verlauf der Messwerte auf Niveau der Comptonwellenlänge oder unterhalb dieser berechnet werden kann. Somit ist nach den Resultaten

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

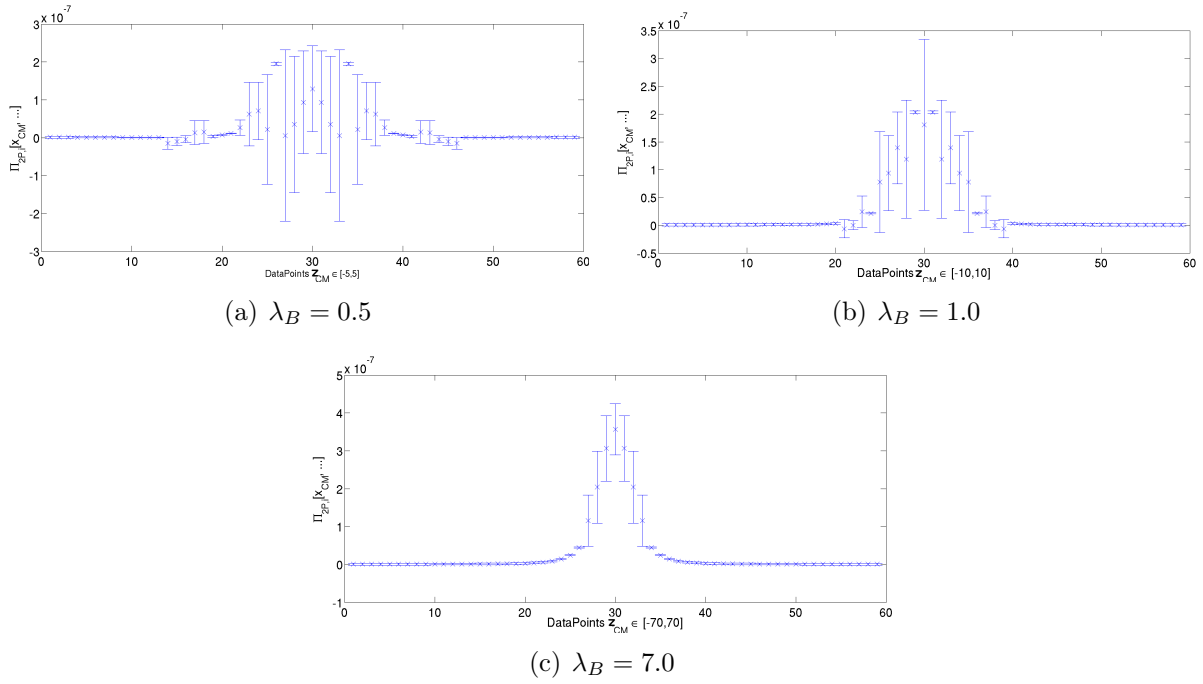


Abbildung 3.17.: Entwicklung des statistischen Fehlers der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ in Abhängigkeit von λ_B bei 200000 Weltlinien. Die maximale Feldstärke liegt bei $eB_0 = 0.2$ und einem einfallenden Photon von $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$.

aus den Abbildungen 3.16 und 3.17 die Zuverlässigkeit der Weltliniennumerik nur für:

$$\lambda_B > \lambda_C$$

garantiert, weil auf Niveau der Comptonwellenlänge ein systematischer Fehler vorliegt, der eventuell auftretende physikalische Effekte überdeckt. Betrachtet man an dieser Stelle zunächst einmal den Wert für $\Pi_{2P,i}[z_{CM}, \dots]$ bei $z_{CM} = 0$ so sinkt der statistische Fehler bei 200000 Weltlinien von über 100 % bei $\lambda_B = 0.1$ auf 18 % bei $\lambda_B = 10.0$. Ein analoger Plot zu Abbildung 3.15 mit 200000 Weltlinien zeigt keine wesentliche Verbesserung. Damit bleibt der Bereich unterhalb der Comptonwellenlänge λ_B mit der Weltliniennumerik mit der von uns getesteten Größe der Statistik schlecht zugänglich. Hierbei ist anzumerken, dass diese Aussage natürlich zunächst nur in dem von uns betrachteten Parameterbereich für eB_0 , k_{in} und k_{out} , zutreffend ist. Eine weitere Vergrößerung der Statistik ist mit den verfügbaren Hardwareressourcen nicht sinnvoll. In den bisherigen Rechnungen wurde der einfallende Photonenvektor mit $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und der des gestreuten Photons $k_{out} = (0, 0, -0.1, 0.1)$ gewählt, nachfolgend sollen diese beiden Vektoren ein wenig verändert werden, um deren Einfluss auf die Weltliniennumerik zu verstehen. Dabei muss nach Wahl der einzelnen Parameter wie Impuls \vec{k} oder Energie ω geklärt werden, ob jeweils im betrachteten Fall Energie- und Impulserhaltung erfüllt wird. In Abbildung 3.18(a) ist das

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

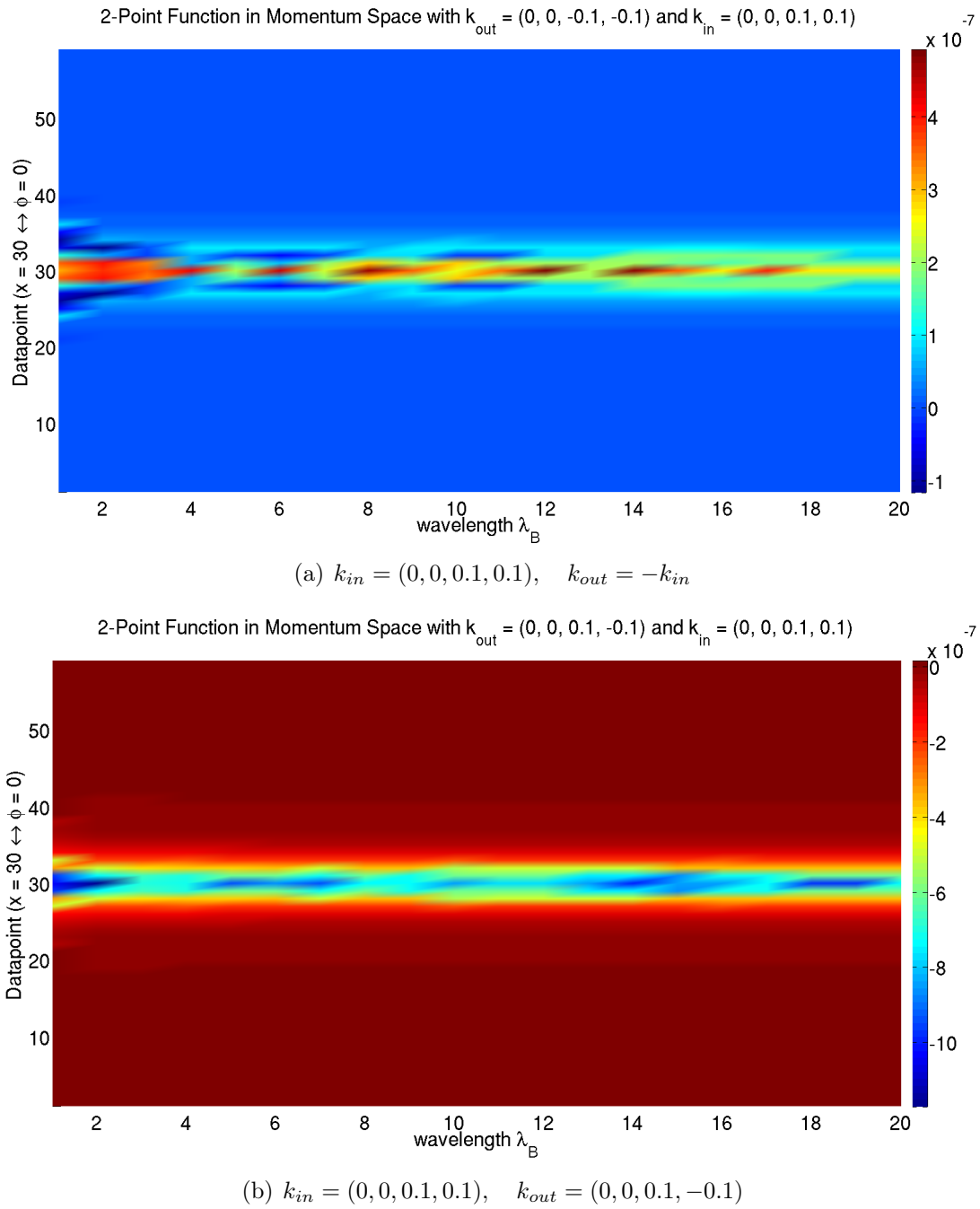


Abbildung 3.18.: 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[z_{\text{CM}}, eB_0, \lambda_B]$ für verschieden Konfigurationen von Photonenvektoren k_j im Impulsraum für ein Ensemble von 40000 Weltlinien. Die maximale Feldstärke ist $eB_0 = 0.2$. Abbildung 3.18(a) entspricht einen transmittierten Photon und Abbildung 3.18(b) den reflektierten Photon. Die Skalierung der y -Achse wurde dabei analog zu Abbildung 3.15 gewählt. Es ist zu erkennen, dass es bei $\phi = 0$ ($z_{\text{CM}} = 0$) zu Fluktuationen in Abhängigkeit von λ_B kommt, die jedoch auf numerische Artefakte zurückgeführt werden können.

Ergebnis für die Konfiguration eines induziert auslaufenden Photons in Vorwärtsrichtung dargestellt, für welches sowohl Energie- als auch Impulserhaltung gilt. Außerdem ist der

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

für die Betrachtung des Reflexionskoeffizienten wichtige Fall in Abbildung 3.18(b) dargestellt bei dem nach Gleichung (3.24) Energieerhaltung gelten muss, die Impulserhaltung aber naiv wegen des Impulsübertrags des inhomogenen Feldes nicht erfüllt ist. In den Abbildungen 3.18(a) und 3.18(b) entwickelt der Polarisationsstensor $\Pi_{i,2P}$ wie erwartet nicht-triviale Strukturen in der Region des Feldprofils. Bei den Fluktuationen im Bereich $x = 30$ oder $z_{CM} = 0$ handelt es sich um numerische Artefakte.

3.5.2. Numerische Fouriertransformation (FFT)

Im letzten Schritt soll nun die nach Gleichung (3.24) geforderte Fouriertransformation durchgeführt werden. Im Fall eines konstanten Feldes eB vereinfacht sich diese, wie schon erwähnt, zu:

$$\Pi_{2P,i}[\dots] = \int_{-\infty}^{\infty} d^D x_{CM} \Pi_i[\dots] e^{i(k_{in}+k_{out})x_{CM}} = (2\pi)^D \delta^D(k_{in} + k_{out}) \Pi_{2P,i}[\dots]$$

wobei $\Pi_{2P,i}[\dots]$ unabhängig von der Weltlinienfixierung x_{CM}^μ ist. Im Fall eines räumlich inhomogenen Feldes ist hingegen die 2-Punkt Funktion abhängig von z_{CM} . Zur Berechnung des Reflexionskoeffizienten R ist es notwendig eine 1-dimensionale numerische Fouriertransformation durchzuführen, wobei wir an dieser Stelle den Algorithmus der Fast-Fourier Transformation (FFT) verwenden. Hierzu muss die Gleichung

$$\Pi_{2P,i}[k_3, \dots] = \int_{-\infty}^{\infty} dz_{CM} \Pi_{2P,i}[z_{CM}, \dots] e^{i(k_{3,in}+k_{3,out})z_{CM}}$$

zunächst in einem beschränkten Intervall für z_{CM} diskretisiert werden, woraus sich

$$\Pi_{2P,l} = \Delta \sum_{j=0}^{N-1} \Pi_{2P,j} e^{ik_{3,lj}/N} \quad (3.28)$$

mit $l \in [0, N]$ (N ist die Anzahl der Datenpunkte) ergibt. In der Gleichung (3.28) beschreibt Δ die Samplingfrequenz, das heißt die Frequenz mit der das Signal $\Pi_{2P,j}$ im Impulsraum abgetastet wird, und N die Anzahl der Sampling- oder auch Datenpunkte. Die Zuverlässigkeit der Transformation ist maßgeblich von dem Intervall abhängig in dem die Abtastung vorgenommen wurde. Dies bedeutet, dass das entsprechende Abtastintervall so gewählt werden muss, dass die vollständige Information des Signals in die Numerik gegeben werden kann. Genauer ist darunter zu verstehen, dass durch die gewählte Signalabtastung die Information eindeutig rekonstruiert wird. Im aktuellen Fall bedeutet dies, dass die Abtastfrequenz Δ so gewählt werden muss, dass die lorentzförmige Struktur des

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

λ_B	Δ	k_C
0.5	0.167	3.0
1.0	0.333	1.5
7.0	2.333	0.2

Tabelle 3.3.: Samplingfrequenz Δ und Nyquistfrequenz k_C für verschiedene Wellenlängen λ_B unter der Annahme einer lorentzförmigen räumlichen Inhomogenität des Magnetfeldes.

Feldes $eB(z)$, analog zu Abbildung 3.12, vollständig in die Rechnung gegeben wird. Da die Breite der Lorentzfunktion abhängig von der Wellenlänge λ_B ist, muss das entsprechende Abtastintervall nach (3.27) gewählt werden, so dass dieses unabhängig von der Wahl der Feldbreite ist. Für die Samplingfrequenz ergibt sich auf diese Weise:

$$\Delta = \frac{z_{\text{CM}}^{\text{max}} - z_{\text{CM}}^{\text{min}}}{N}$$

mit der Anzahl N der Datenpunkte $\Pi_{2P,j}$. Für die Simulation wurde von uns $N = 30$ gewählt und der Simulationsbereich mit $z_{\text{CM}} = [0, 10 \cdot \lambda_B]$ festgelegt, aufgrund der Tatsache das die Funktion $\Pi_i[z_{\text{CM}}, \dots]$ symmetrisch um $z_{\text{CM}} = 0$ ist. In Tabelle 3.3 wurde für die Wellenlängen aus der Abbildung 3.16 und 3.17 einmal beispielhaft die Samplingfrequenz Δ und die Nyquistfrequenz k_C berechnet. Die Nyquistfrequenz k_C , die den Grenzbereich für den Parameter des Impulsübertrags k_3 definiert berechnet sich über:

$$k_C = \frac{1}{2\Delta}.$$

Zur Berechnung der FFT verwenden wir das Programm *Matlab*, das die entsprechenden Routinen bereitstellt. Dabei sind wir wie folgt vorgegangen:

1. Importieren der Simulationsresultate für $\Pi_{2P,i}[x_{\text{CM}}, \dots] \equiv f$ der Weltlinienrechnung in Matlab.
2. Ausführung des Befehls:

$$\Pi_{2P,i}[k_3, \dots] \equiv F = N \cdot \Delta \cdot \text{fftshift}(\text{ifft}(f))$$

zur Berechnung von $\Pi_{2P,i}[k_3, \dots]$.

3. Bestimmung von $k_3 = 2\pi \cdot [-k_C, \dots, k_C]$.

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

Dabei ist darauf zu achten, auf welche Weise die Fouriertransformation in den jeweiligen Routinen definiert ist. In Matlab ist die Funktion *ifft* zum Beispiel mit:

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j (e^{i \cdot 2\pi})^{-(j-1)(k-1)}$$

deklariert, weshalb bei der Bestimmung von k_3 eine Multiplikation mit den Faktor 2π notwendig ist. Zunächst wurde die Fouriertransformation für die Ergebnisse aus den Ab-

2-Point Function Π_{\perp} in Position Space with $\mathbf{k}_{\text{out}} = (0, 0, -0.1, -0.1)$ and $\mathbf{k}_{\text{in}} = (0, 0, 0.1, 0.1)$

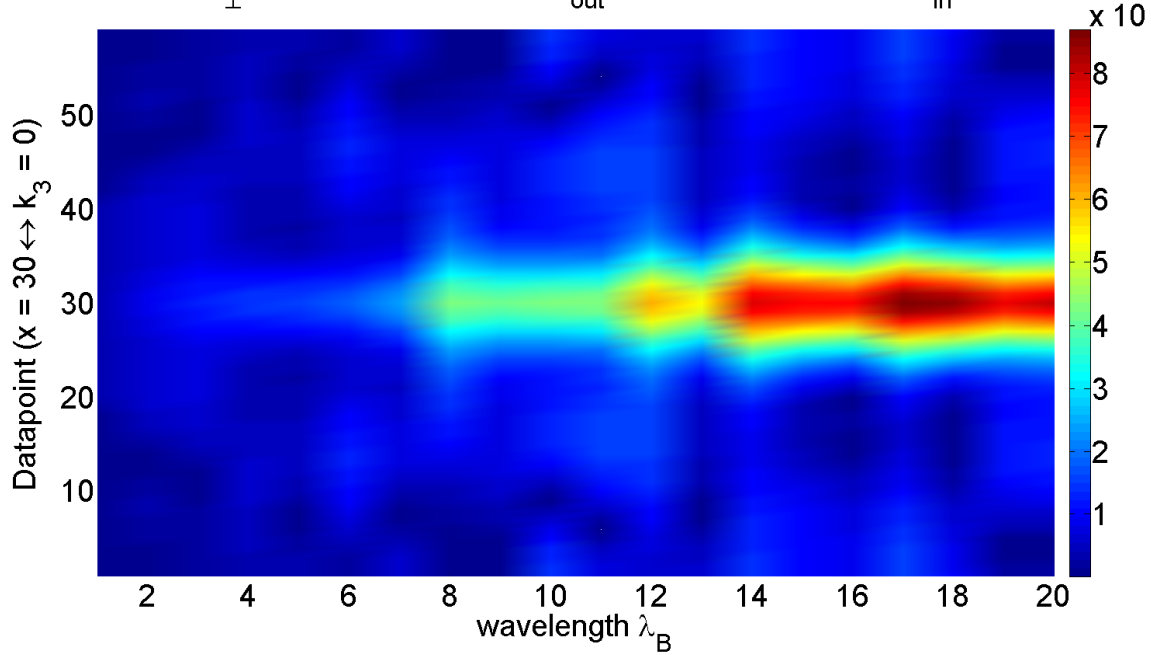


Abbildung 3.19.: Ergebnisse der numerischen Fouriertransformation für $\Pi_{2P,\perp}[k_3, \dots]$ für transmittierte Photonen mit $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und $k_{out} = (0, 0, -0.1, -0.1)$ sowie einen Ensemble von 40000 Weltlinien bei einer maximalen Feldstärke von $eB = 0.2$. Die Skalierung der y -Achse wurde dabei analog zu Abbildung 3.15 gewählt.

bildungen 3.18(a) und 3.18(b) vorgenommen. Die Resultate aus Abbildung 3.18(b) ermöglichen die Berechnung des Reflexionskoeffizienten R , da in diesem Fall die entsprechenden Forderungen an die Impulse erfüllt werden. In Abbildung 3.19 wurde zunächst die FFT für die Daten eines induziert auslaufenden Photons in Vorwärtsrichtung vorgenommen. Nach der Gleichung $k_3 = k_{in,z} + k_{out,z}$ sind für diesen Fall die Resultate an der Stelle $k_3 = 0$ von Bedeutung, die das Verhalten des Transmissionskoeffizienten wiedergeben. In Abbildung 3.20 ist zu erkennen, dass die Werte für $\Pi_{2P,\perp}[k_3 = 0, \dots]$ für größer werdende Wellenlängen auf etwa $(7.8 \pm 0.7) \cdot 10^{-6}$ ansteigen. Da es sich um induziert auslaufende Photonen in Vorwärtsrichtung handelt, ist dieser Wert nicht direkt mit den Reflexions-

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

koeffizienten verknüpft, sondern im Sinne der vorangegangenen Kapitel ein Maß für den entlang des optischen Pfades integrierten Brechungsindex. Auf Niveau der Comptonwellenlänge λ_C oder auch darunter, das bedeutet $\lambda_B \rightarrow 0$, fällt der Wert der 2-Punkt Funktion hingegen auf null ab, was dem Vakuumfall entspricht (Vergleich Gleichung (3.26)).

Eine Änderung der Eingabeparameter in Hinblick auf die Bedingung, dass gelten soll

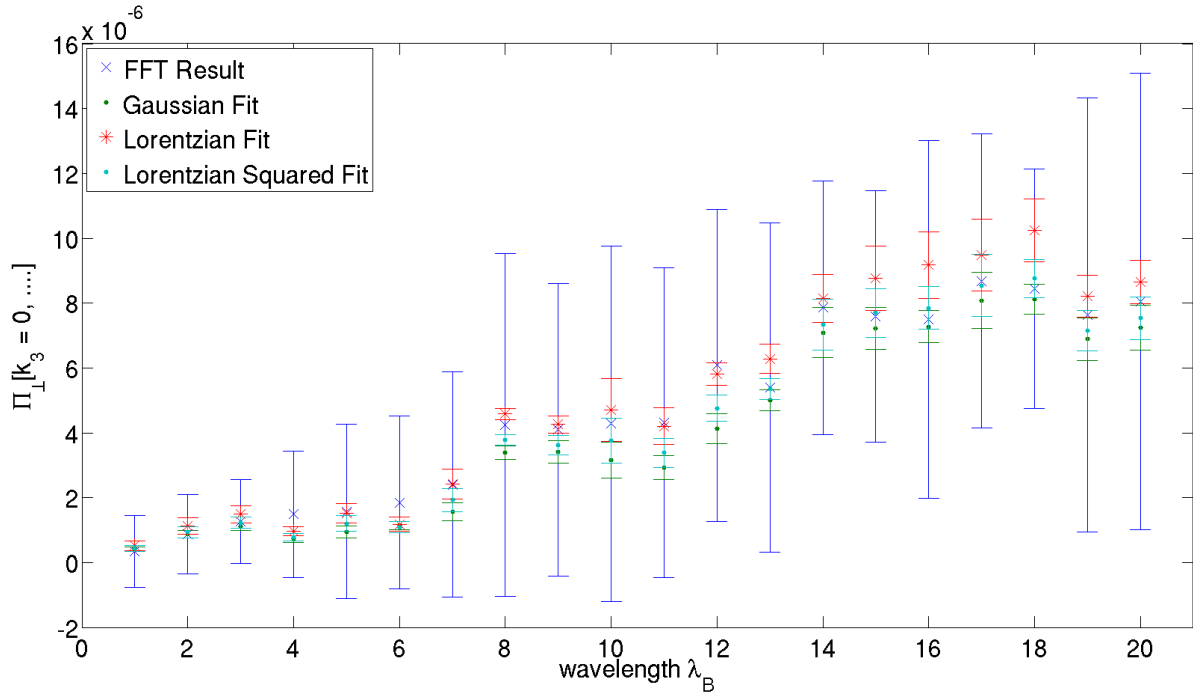


Abbildung 3.20.: 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[k_3 = 0, \dots]$ für $k_3 = k_{in,z} + k_{out,z} = 0$ als Funktion der Feldbreite λ_B , einer maximalen Feldstärke $eB_0 = 0.2$ und einem Ensemble von 40000 Weltlinien. Das Resultat ist verknüpft mit dem über das Feldprofil integrierten Brechungsindex.

$k_{in,z} + k_{out,z} = 2k_{in,z}$, führt auf die Resultate in Abbildung 3.21 für den Fall eines senkrecht zur \vec{B} - \vec{k}_{in} -Ebene polarisierten Photons. Im Gegensatz zum transmittierten Photon, muss nun jedoch eine Auswertung an der Stelle $k_3 = 2k_{in,z} = 0.2$ erfolgen, also an einer Position $k_3 \neq 0$, entsprechend der Wahl der einzelnen Parameter. Bei Anwendung einer numerischen Fouriertransformation ist die Schrittweite im Ortsraum, die im Nachfolgenden mit Δ_{PS} bezeichnet werden soll, jedoch maßgeblich von der Samplingfrequenz Δ und der Anzahl der Datenpunkte N abhängig. Es ist somit zu empfehlen die numerischen Werte aus Abbildung 3.18(b) mit Hilfe einer mathematischen Funktion $f(x)$ anzufitten und anschließend eine exakte Fouriertransformation der Art:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ikx}$$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

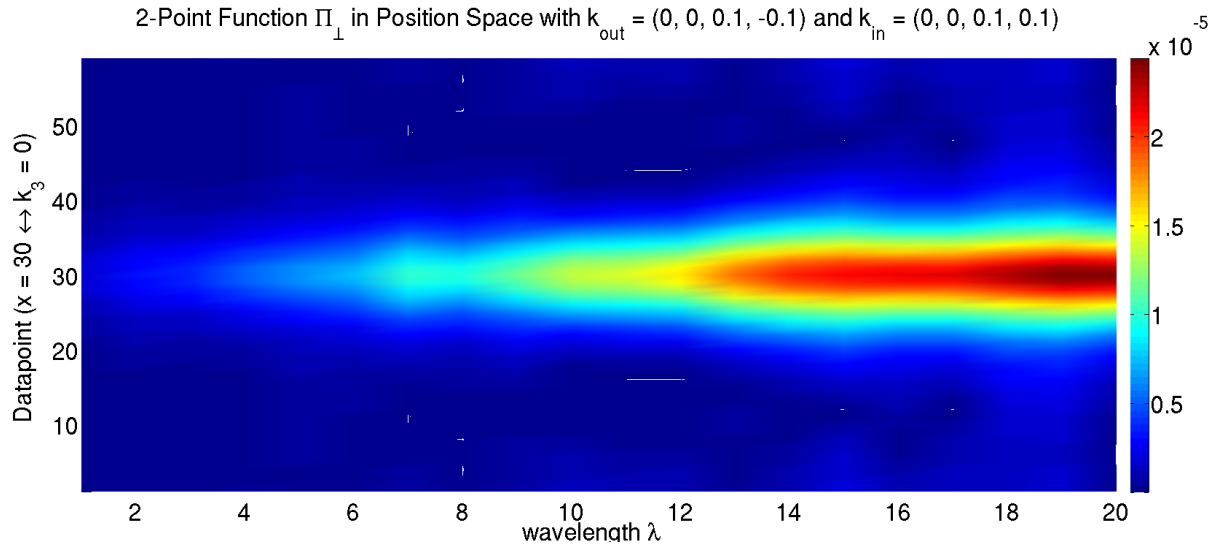


Abbildung 3.21.: Ergebnisse der numerischen Fouriertransformation für $\Pi_{2P,\perp}[k_3 = 0.2, \dots]$ für ein reflektiertes Photon mit $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und $k_{out} = (0, 0, 0.1, -0.1)$ sowie einem Ensemble von 40000 Weltlinien bei einer maximalen Feldstärke von $eB = 0.2$. Die Skalierung der y -Achse wurde dabei analog zu Abbildung 3.15 gewählt.

durchzuführen. Die numerischen Fehler ergeben sich dabei direkt mit Hilfe der Fitfunktion $f(x)$. In Abbildung 3.22 sind die Ergebnisse an der Stelle $k_3 = 0.2$ für die Funktionen

Funktion	$f(x)$	$F(k)$
Gaussfunktion	$a \exp \left\{ -\ln(2) \frac{x^2}{b^2} \right\}$	$a \cdot b \cdot \exp \left\{ -\frac{k^2 b^2}{\ln(16)} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{\ln(2)}}$
Lorentzfunktion	$\frac{a}{1 + \frac{x^2}{b^2}}$	$a \cdot b \cdot \pi \cdot \exp \{ - k b \}$
quadratische Lorentzfunktion	$\frac{a}{\left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^2}$	$a \cdot b^2 \cdot \pi \cdot \exp \{ - k b \} \cdot \left(\frac{1}{b} + k \right)$

Tabelle 3.4.: Mathematische Funktionen zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten

$F(k)$ aus Tabelle 3.4 aufgetragen. Die beste Fitfunktion orientiert sich an der Entwicklung des χ^2 -Wertes, der im Weiteren die quadratische Lorentzfunktion als bestes Modell der numerischen Werte festlegt. In Abbildung 3.22 ist dies zunächst nicht ersichtlich, da in diesem Fall nur die Ergebnisse des Fits aufgetragen sind. Es ist zu erkennen, dass sich ein Maximum an der Stelle $\lambda_B = 7$ ($\omega \cdot \lambda_B = 0.7$) mit $R = 0.9 \cdot 10^{-9}$ ausprägt. Im Wellenlängenbereich unterhalb des Maximums ist ein linearer Anstieg zu erkennen, während für Wellenlängen oberhalb des Maximums die Funktion abfällt und wie erwartet für große Wellenlängen gegen null konvergiert. Es ist nun möglich die erhaltenen numerischen Ergebnisse mit einer analytischen Rechnung näherungsweise zu vergleichen. Hierzu wurde von der Annahme ausgegangen, dass es sich bei den externen Feldern um schwache Felder $B \ll B_{cr}$ handelt und sich der betrachtete Wellenlängenbereich deutlich oberhalb der

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

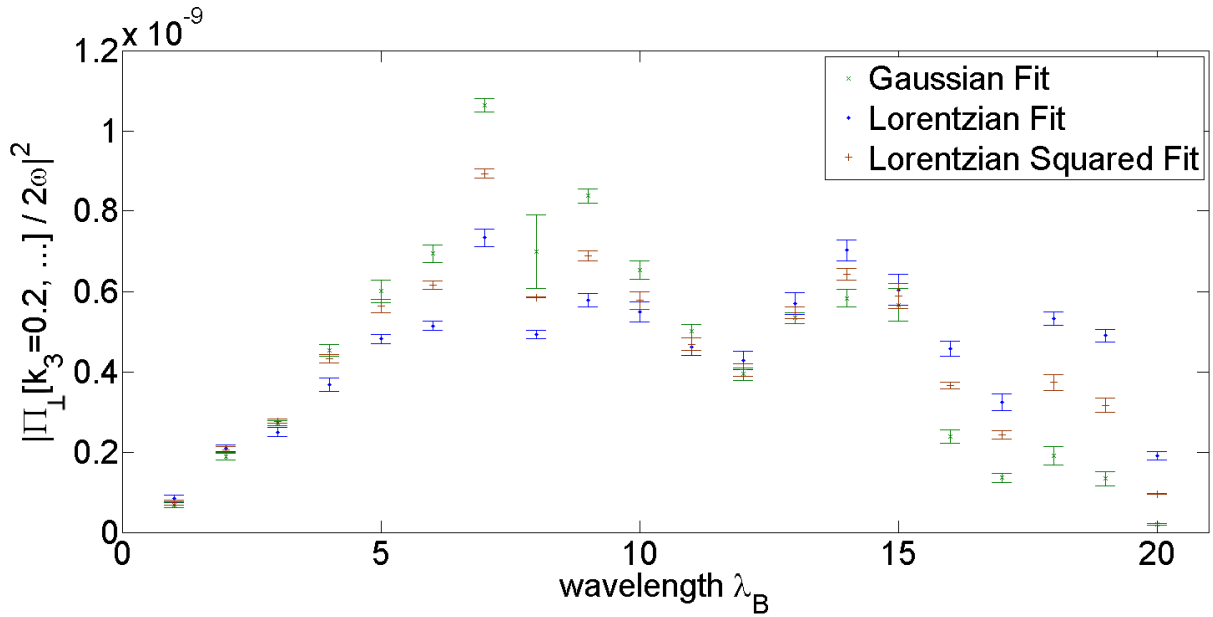


Abbildung 3.22.: 2-Punkt Funktion im Ortsraum für $k_3 = k_{in,z} + k_{out,z} = 0.2$ und unterschiedliche Fitfunktionen

Comptonwellenlänge λ_C befindet, es also $\lambda_B \gg \lambda_C$ gelten soll. Für den Reflexionskoeffizient ergibt sich unter Berücksichtigung dieser Annahmen [57]:

$$R_{\perp,\parallel} = \left| \frac{c_{p,\perp,\parallel}}{4} \left(\frac{eB}{m^2} \right)^2 2\omega\lambda_B (1 + 2\omega\lambda_B) \exp(-2\omega\lambda_B) \right|^2 \quad (3.29)$$

mit den Faktoren der sQED:

$$\left(\frac{c_{p,\parallel}}{c_{p,\perp}} \right) = \frac{\alpha}{90} \left(\frac{1/4}{7/4} \right).$$

In den einzelnen Faktoren ist die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ zu setzen. Die Resultate für den Fall der senkrechten Polarisierung sind in Abbildung 3.23 dargestellt, und werden mit der entsprechenden analytischen Näherungsrechnungen (rot) verglichen. Die numerischen Resultate (blaue Punkte) liegen dabei unterhalb der lokalen Feldnäherung, wobei jedoch das Verhalten der entsprechenden Resultate über den betrachteten Wellenlängenbereich, der analytischen Vorhersage entspricht. Das Maximum der numerischen Rechnung liegt in etwa bei $R = (4.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-11}$ mit einer Wellenlänge von $\omega\lambda_B = 0.7$ und weicht somit von der analytischen Näherung um $1.2 \cdot 10^{-10}$ ab. Diese Abweichung lässt den Schluss zu, dass für die Berechnung des Reflexionskoeffizienten im Fall der senkrechten Polarisierung \perp die Nullmode ($\Pi_{2P,0}$) eine entscheidende Rolle spielt. Im Rahmen der analytischen Rechnungen wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Moden unter den angesetzten Bedingungen sauber voneinander separiert werden können, was im Fall

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

der numerischen Simulationen nicht der Fall zu sein scheint. Es zeigt sich vielmehr, dass diese Mode in den analytischen, also im Kontinuumslimit und den numerischen Rechnungen unterschiedlich berücksichtigt wird. Somit ist in den Ergebnissen für den senkrechten Fall noch ein weiteres Signal verborgen, dass nicht eindeutig separiert werden kann und womit eine naive Berechnung des Reflexionskoeffizienten nach Gleichung (3.29) nicht möglich ist. Ein weiterer Grund ist aber auch, dass in der entsprechenden Gleichung in der lokal-konstanten Näherung im senkrechten Fall eine andere Geometrie in Hinblick auf die Richtung des externen Feldes im Bezug zur Propagationsrichtung der einzelnen Photonen verwendet worden ist, beziehungsweise die Geometrie bei der Bestimmung der Näherungslösung auf eine andere Weise ausgewertet wurden. Die Abweichung der Lage des Maximum ist aber auch mit der gewählten Schrittweite der Signalabtastung verbunden, die bei $\Delta(\omega\lambda_B) = 0.1$ liegt. Für einen besseren Vergleich zu den Gleichungen (3.29) sollte

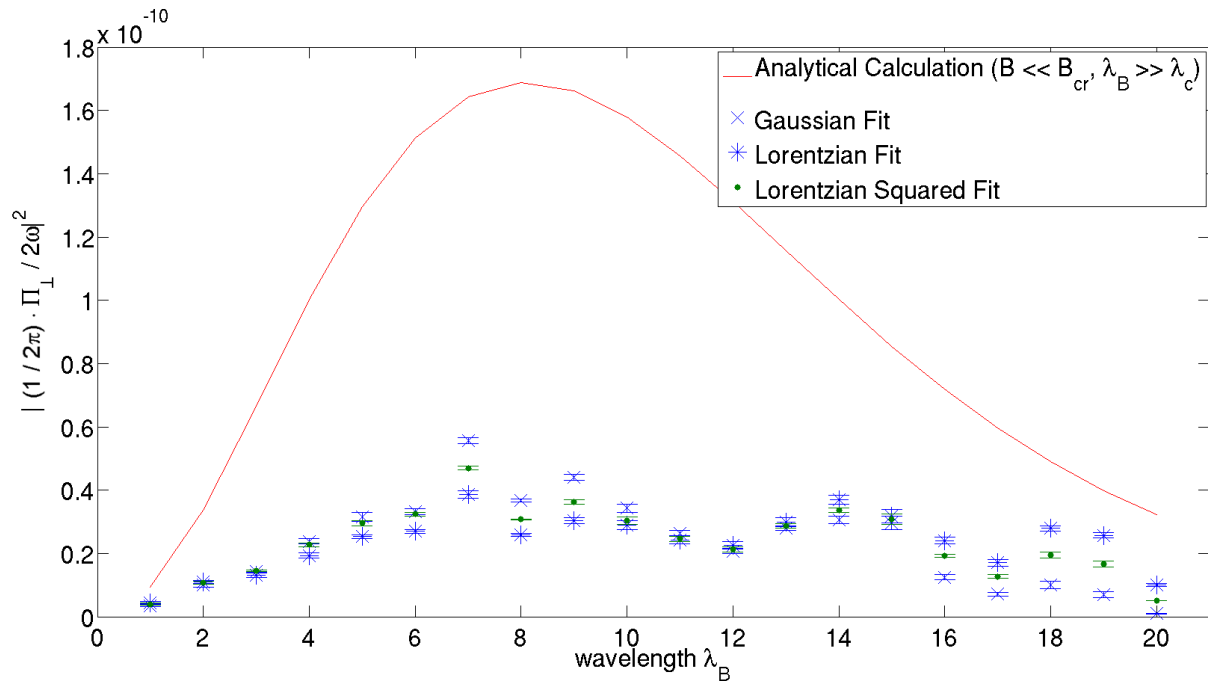


Abbildung 3.23.: Vergleich der Analytischen Näherungsrechnung (rot) mit den Resultaten des Weltlinienformalismus für den senkrechten Polarisationsfall

somit die parallele Polarisation betrachtet werden, was in Abbildung 3.24 entsprechend vorgenommen worden ist. Im Gegensatz zur senkrechten Polarisation ist an dieser Stelle sofort zu erkennen, dass die numerischen Resultate die Näherungsrechnung weit besser wiedergeben. Für große Wellenlängen ist außerdem eine gute Übereinstimmung mit dem analytischen Resultaten zu erkennen, wohingegen im Bereich kleiner Wellenlängen sich noch keine klare Struktur ergibt. Um diese Tatsache ein wenig genauer zu verstehen,

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

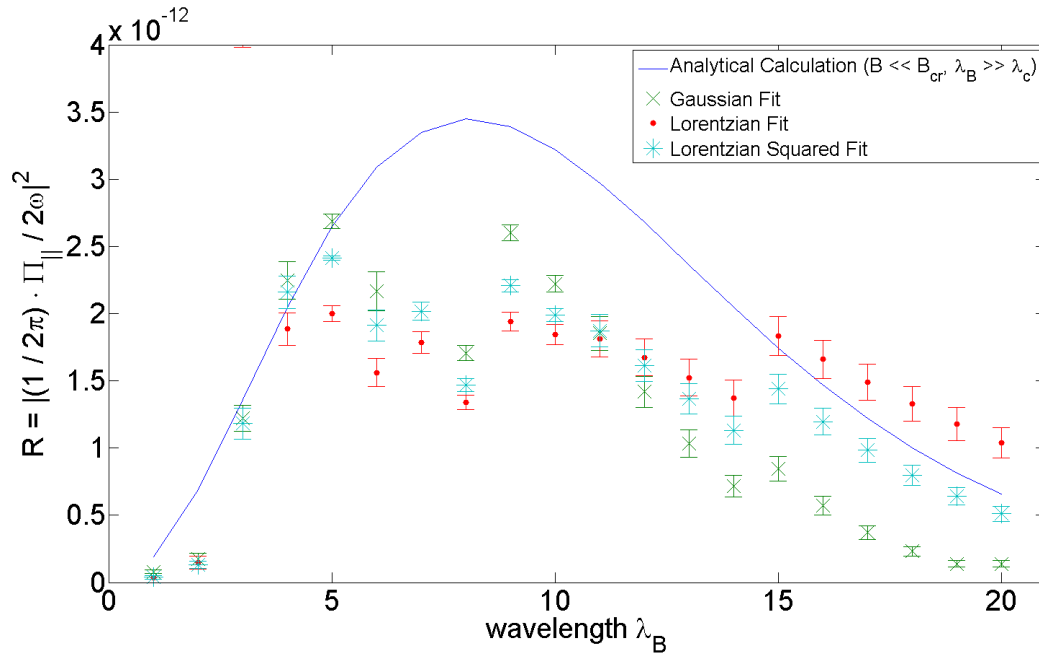


Abbildung 3.24.: Vergleich der Analytischen Näherungsrechnung (rot) mit den Resultaten des Weltlinienformalismus für den parallelen Polarisationsfall

kann man die numerischen Resultate im x_{CM} -Raum mit der analytischen Näherungsgleichung:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\Pi_{\text{numerisch}}}{2\omega} \simeq \frac{c_{p,\parallel,\perp}}{\pi} \cdot \omega_{\text{out}} \cdot \left(\frac{eB(z)}{m^2} \right)^2$$

vergleichen. In Abbildung 3.25 ist zu erkennen, dass die numerischen Resultate die Näherungsrechnung sehr gut approximieren. Jedoch weisen, wie zum Beispiel in Abbildung 3.25(c), einige Werte eine große Abweichung von dem zu erwartenden Ergebnis auf. Diese Werte zeichnen sich oftmals durch einen großen statistischen Fehler aus und sind dafür verantwortlich, dass es bei dem Versuch, eine Fitfunktion durch die einzelnen Punkte zu legen, zu einem erheblichen Fehlern kommt. Oftmals verhindern genau diese stark fehlerbehafteten Punkte eine sinnvolle Anwendung des Non-linear-Least-Squares Verfahren. Die Ursache der Problematik ist in der zuvor durchgeführten Renormierung der 2-Punkt Funktion zur Beseitigung der vorhandenen Divergenzen zu finden. Die Qualität der einzelnen Counter- und Korrekturterme wird anhand des ersten feldabhängigen Korrekturterms $c^{\mu\nu}$ ermittelt. Ausgehend davon wird über die numerischen Fehler ein Umschaltunkt T_D bestimmt, der den Übergang zwischen den entsprechenden Integranden aus Gleichung (3.15) und (3.16) markiert. Eine genauere Erklärung der Vorgehensweise ist am Anfang des Kapitels gegeben. Mit dem Wissen, dass diese Werte eine entsprechend größere Abweichung besitzen, lässt sich die Fitroutine dahingehend optimieren, dass diese Werte für

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

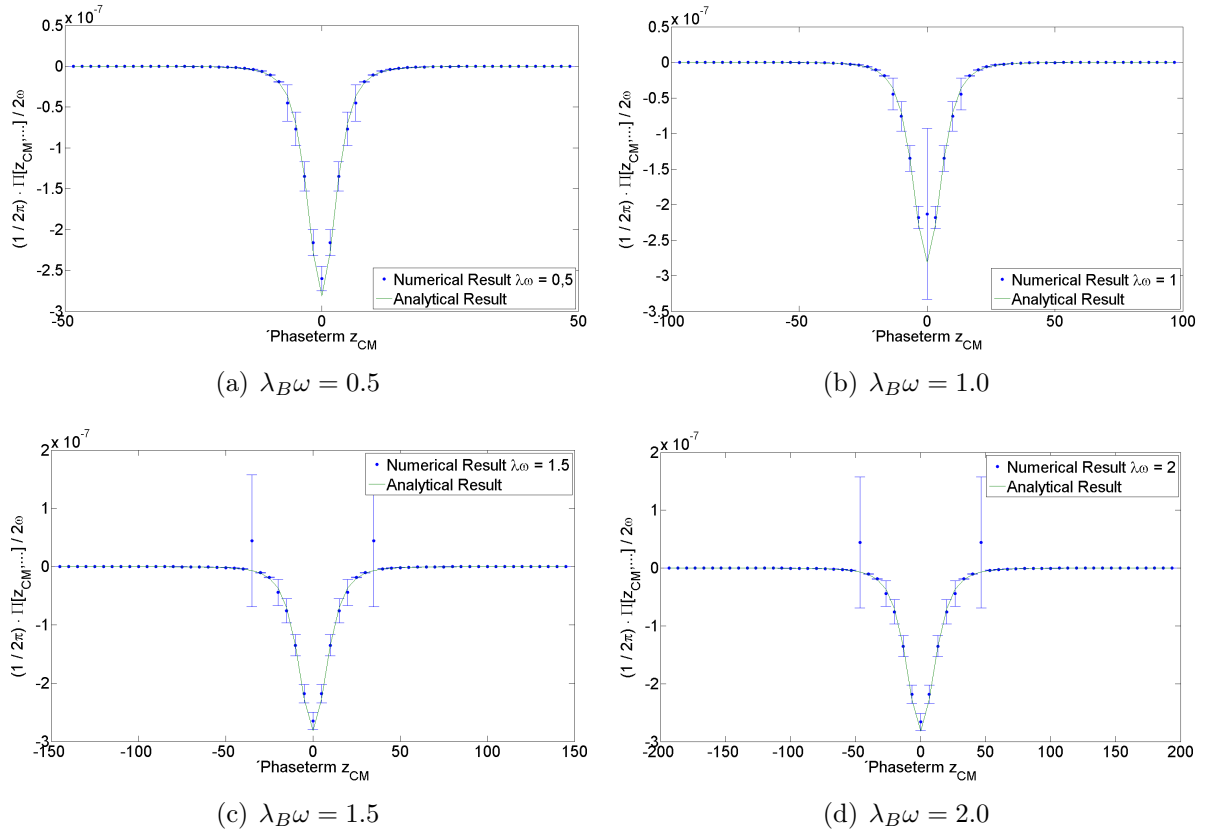


Abbildung 3.25.: Vergleich der numerischen Resultate mit der analytischen Näherungsrechnung im Ortsraum. Es ist in den Abbildungen 3.25(c) oder 3.25(d) zu erkennen das einzelne Punkte eine starke Abweichung besitzen, jedoch der dazugehörige statistische Fehler diese abdeckt.

den Fit ausgeschlossen werden. Damit wird die implizite Annahme gemacht, dass es sich beim Endresultat um eine glatte Funktion handelt, was anschaulich zu erwarten ist. Für den Fall einer Lorentzquadrat-Funktion führt dies auf das Ergebnis in Abbildung 3.26, wobei jedoch die darin zu erkennenden statistischen Fehler aufgrund des Ausschließens einzelner Punkte unterschätzt sind. Es ist in dieser Abbildung auch zu erkennen, dass im Gegensatz zur Abbildung 3.24 die numerischen Resultate den Verlauf der analytischen Näherungsrechnung klar wiedergeben, jedoch leicht unterhalb von diesen liegen. Hinsichtlich der physikalischen Interpretation lässt sich somit erst einmal sagen, dass der Näherung für große Wellenlängen λ_B und schwache Feldstärken eB_0 das richtige Verhalten des Reflexionskoeffizienten R wiedergeben, jedoch der tatsächliche Effekt ein wenig schwächer ist als die Näherung vorhersagt. Aus diesem Grund sollen im nächsten Schritt die Resultate aus der Abbildung 3.20 noch einmal mit einer höheren Genauigkeit bestimmt werden. Hierzu haben wir die Anzahl der Weltlinien von 40000 auf 200000 abgeändert und somit die Statistik um den Faktor 5 erhöht. Wir erhalten auf diese Weise einen analogen Plot zu Abbildung 3.20 in dem noch einmal die 2-Punkt Funktion an der Stelle $k_3 = 0$ für ein

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

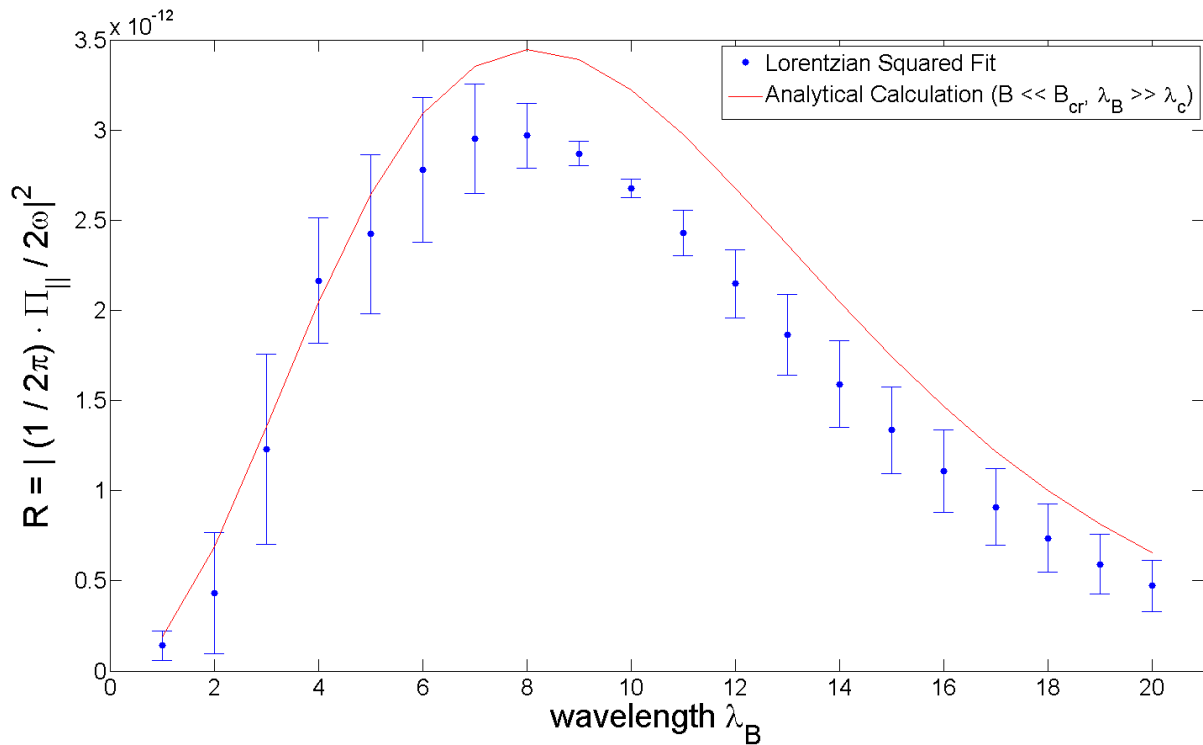


Abbildung 3.26.: Vergleich der Analytischen Näherungsrechnung (rot) mit den Resultaten des Weltlinienformalismus für den parallelen Polarisationsfall nach Optimierung der Fitroutinen.

induziert auslaufendes Photon in Vorwärtsrichtung aufgetragen werden kann. Wie schon in Abbildung 3.20 konnten wir mit Hilfe einer größeren Statistik zeigen, dass die Werte für $\Pi_{\perp}[k_3 = 0, \dots]$ gegen einen bestimmten Wert bei $(7.3 \pm 0.6) \cdot 10^{-6}$ im Bereich großer Wellenlängen streben, jedoch ist immer noch unklar ob es sich im weiteren Verlauf um ein konvergentes Verhalten gegen diesen Wert handelt oder mit einem weiteren Anstieg zu rechnen ist. Hinsichtlich der statistischen Fehler konnte durch die entsprechende Vergrößerung der Statistik nur eine minimale Verbesserung erzielt werden, jedoch ist eine deutlich geringere Streuung der einzelnen Messwerte zu erkennen. Im Hinblick auf die Gültigkeit der einzelnen Fitfunktionen aus Tabelle 3.4 ist außerdem zu erkennen, dass alle drei Funktionen die Resultate der FFT recht gut approximieren und somit im Hinblick auf die Bestimmung von R geeignet sind. Die beste Funktion wird dann entsprechend durch χ^2 definiert. Mit den Resultaten aus der Abbildung 3.26 konnten wir erstmals das Phänomen der Quantenreflexion jenseits der lokal-konstanten Feldnäherung untersuchen. Dabei zeigte sich für den Fall der parallelen Polarisation eine gute Approximation der analytischen Näherungsrechnungen im lokal-konstanten Feld. In numerischer Hinsicht hat sich die Umsetzung der einzelnen Gleichungen für den Fall eines reflektierten Photons als äußerst problematisch herausgestellt, weil der Impulsübertrag in diesem Fall $k_3 \neq 0$

3. Die 2-Punkt Korrelationsfunktion

beträgt. Des weiteren macht auch die diffizile numerische Renormierung einer höhere Statistik notwendig. Im untersuchten Parameterbereich hat sich jedoch gezeigt, dass die lokal-konstante Näherung für den parallelen Fall qualitativ bestätigt werden konnte. Aufgrund von Abbildung 3.26 lässt sich außerdem sagen, dass exakte Resultate im Bereich von 10 % unterhalb der lokal-konstanten Näherung liegen werden.

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Bisher wurden von uns die Korrelationsfunktionen auf Niveau der 2-Punkt Korrelationsfunktion im Rahmen der Weltliniennumerik betrachtet. Es stellt sich nun also die Frage, ob eine Anwendung des Verfahrens auch für höherwertige Korrelationsfunktionen möglich ist. Ein wichtiger Schritt zur Beantwortung dieses Sachverhaltes ist die Betrachtung der 3-Punkt Funktion, wo wir in dem Zusammenhang die folgenden Fragestellungen klären möchten:

1. Welche Effekte lassen sich im Fall eines räumlich inhomogenen Magnetfeldes erkennen?
2. Verschwindet der Anteil des Boxdiagramms zum Phänomen des Photonsplittings auch im räumlich inhomogenen Feld vollständig?

Zur Beantwortung dieser Fragen beschränken wir uns zunächst auf den spinfreien Fall (sQED), wobei es sich bei dem externen Feld um ein reines Magnetfeld \vec{B} handeln soll, das wie bei der 2-Punkt Funktion in \vec{e}_1 -Richtung liegt. Im Folgenden sei beispielhaft derjenige Anteil der 3-Punkt Korrelationsfunktion von Interesse, der zum Phänomen des Photonsplittings in einem äußeren Feld beiträgt. Erste analytische Rechnungen für ein konstantes Magnetfeld wurden 1971 von Adler [28] durchgeführt. Dabei diente wiederum im Limes langwelliger Photonen der Heisenberg-Euler Lagrangian [1], Gleichung (1.1) als Ausgangspunkt für die Betrachtungen, wobei das externe Feld in den jeweiligen lorentzinvarianten Größen enthalten ist. Der Prozess selber ist gegenüber den Effekten der

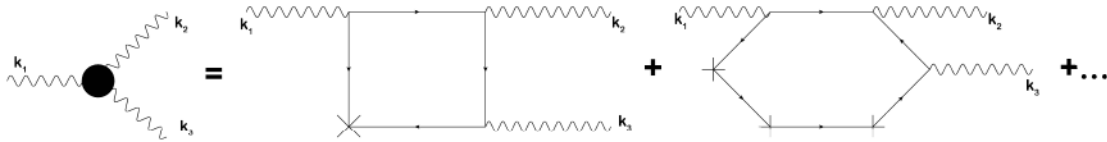


Abbildung 4.1.: Prozess des Photonsplittings als Feynman Diagramm. Die erste Ordnung wird als Boxdiagramm und die Zweite als Hexagondiagramm bezeichnet. Die äußeren Beinchen symbolisieren auch in diesem Fall die Eichfelder A_j^μ mit $j = 1, 2, 3$ der einzelnen Photonen (Photonenlinien), während die Kreuze Ankopplungen an das externe Feld symbolisieren.

Vakuumpolarisation, die mit Hilfe der 2-Punkt Korrelationsfunktion behandelt werden können, bei schwachen Feldern stark unterdrückt. Er ist jedoch bei der Untersuchung von

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

astrophysikalischen Objekten wie Neutronensternen oder Pulsaren [7; 81], bei denen in natürlicher Form sehr starke Magnetfelder auftreten, von Interesse. Aber auch in künstlich erzeugten Feldern, wie innerhalb eines Starkfeldlasers (zum Beispiel POLARIS), ist ein Verständnis dieses Effektes von Bedeutung [82]. Photonsplitting kann zunächst diagrammatisch wie in Abbildung 4.1 betrachtet werden. Wegen des Furry-Theorems und der Forderung

$$k_1 = k_2 + k_3 \quad (4.1)$$

für den Prozess des Photonsplittings werden $2n + 1$ Wechselwirkungen mit dem externen Feld benötigt. Alle Lorentzinvarianten, die zum Matrixelement beitragen können, lassen sich daher in der Form

$$F^1 F^2 F^3 \underbrace{\overline{F} \dots \overline{F}}_{2n+1} \cdot \underbrace{k_1 \dots k_l}_{2l} \quad (4.2)$$

schreiben. Die Ankopplungen an das externe Feld werden mit \overline{F} beschrieben von denen es $2n+1$ Faktoren ($n \in \mathbb{N}_0$) gibt. Gleichung (4.1) ermöglicht es außerdem die einzelnen $2l$ ($l \in \mathbb{N}_0$) Photonenvektoren k_j auf den Vektor k_1 zurückzuführen, die im einzelnen die Eigenschaft $k_j^2 = 0$ erfüllen (on-shell Bedingung). Aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors \overline{F} , sowie der Identität für on-shell Photonen $F_{\mu\nu}^j k_1^\nu = 0$ gibt es nur unter der Bedingung $n \geq l$ nichtverschwindende Anteile des Ausdrucks (4.2). Ferner zeigt sich mit $v^\mu = \overline{F}^{\mu\nu} k_{1,\nu}$, dass sich im Fall $l = n$ alle möglichen Kontraktionen der Gleichung

$$F^1 F^2 F^3 \overline{F} \cdot \underbrace{v \dots v}_{2n}$$

zu null ergeben. Zusammenfassend bedeutet dies, dass es nur nichtverschwindende Terme für $l = n - 1$, also $2n - 2$ Faktoren k_1 , geben kann. Der Term niedrigster Ordnung mit $n = 0$ wird als Boxdiagramm bezeichnet und beinhaltet genau eine Wechselwirkung mit dem externen Feld. Aufgrund der vorangegangenen Betrachtungen muss diese Ordnung jedoch verschwinden, da in diesem Fall sich $2n - 2$ zu -2 ergibt. Die niedrigste nichtverschwindende Ordnung nach Adler ist somit $n = 1$ und beinhaltet 3 Wechselwirkungen mit dem externen Feld. Das Diagramm selbst wird auch als Hexagondiagramm bezeichnet. Es ist zu Beachten, dass für diese Überlegung immer $\overline{F} = \text{const}$ gilt. Bei Abbildung 4.1 handelt es sich lediglich um eine vereinfachte Darstellung der Entwicklung bei der noch die entsprechenden Permutationen der Vertices zu berücksichtigen sind. Adler konnte somit

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

zeigen, dass sich der Prozess des Photonsplittings aus dem Heisenberg-Euler Lagrangian durch Differentiation [28] über,

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial F_{\pm} \partial F_{\pm} \partial F_{\pm}}, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{4}(F_+^2 + F_-^2) \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4i}(F_+^2 - F_-^2),$$

bestimmen lässt. Die Ableitungen nach den Feldstärken F_{\pm} symbolisieren die am Prozess beteiligten Photonen. Unter Berücksichtigung eines reinen Magnetfeldes ergibt sich für die Matrixelemente \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} \sim f_r^{\pm} f_s^{\pm} f_t^{\pm} \frac{\mathcal{L}}{\partial F_r^{\pm} \partial F_s^{\pm} \partial F_t^{\pm}},$$

mit $f^{\pm} = \sqrt{4\pi} \cdot \omega \cdot (\hat{k} \times i\hat{\epsilon} \pm \hat{\epsilon})$ und $r, s, t \in \{1, 2, 3\}$. Bei den Vektoren $\hat{\epsilon}$ handelt es sich um die entsprechenden Polarisationsvektoren, die den einzelnen Photonen zugeordnet werden können. Adler zeigte weiter in seiner Arbeit, dass im Fall eines konstanten Magnetfeldes nur eine erlaubte Konfiguration der Polarisation möglich ist, nämlich,

$$(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3, \tag{4.3}$$

wobei das einfallende Photon parallel zur Ebene, die aufgespannt wird durch den Propagationsvektor \vec{k}_1 und den Vektor \vec{B} des externen Feldes, polarisiert ist und die beiden austretenden Photonen senkrecht dazu.

4.1. Analytische Betrachtung der 3-Punkt Korrelationsfunktion im konstanten Magnetfeld

Die Rechnung von Adler zur Bestimmung der 3-Punkt Korrelationsfunktion im Rahmen des Prozesses des Photon Splittings basierte im soft-photon Limes auf der Anwendung des Heisenberg-Euler Lagrangian. Die daraus resultierende Darstellung des Matrixelements ist für numerische Anwendungen vergleichsweise unhandlich. Eine Behandlung dieses Effektes im Rahmen von inhomogenen Feldern ist ein im Allgemeinen technisch ungelöstes Problem. Erst im Jahr 1996 konnten Adler und Schubert [47] eine Umsetzung innerhalb des Weltlinienformalismus veröffentlichen. Eine exakte mathematische Lösung des Problems

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

ist zwar auch in diesem Fall, wie auch schon im Rahmen der 2-Punkt Funktion gezeigt, nur für konstante Felder möglich, jedoch können die entsprechenden Ausgangsgleichungen,

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\sigma} &= (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \int \mathcal{D}x \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \int_0^T d\tau_3 \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2 \right) \\ &\quad \times \left\{ \dot{x}_1^\mu e^{ik_1 x_1} \dot{x}_2^\nu e^{ik_2 x_2} \dot{x}_3^\sigma e^{ik_3 x_3} \right\} \exp \left(-ie \oint d\tau A_\mu \dot{x}^\mu \right) \\ &= \int_0^\infty dT \delta \Pi^{\mu\nu\sigma}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit dem in dieser Arbeit entwickelten Zugang numerisch direkt umgesetzt werden. In späteren Rechnungen wollen wir uns auf den Integranden der Eigenzeitintegration $\delta \Pi^{\mu\nu\sigma}[T]$ beschränken, weshalb dieser hier eingeführt werden soll. Um zu zeigen, dass diese Umsetzung überhaupt möglich ist, reproduzierten Schubert und Adler in ihrer entsprechenden Arbeit zunächst die Resultate aus [81]. Im Folgenden vollziehen wir diese analytische Weltlinienrechnung für den Fall skalarer QED nach, um analytische Vergleichspunkte für die spätere Numerik zu erarbeiten. Das externe Feld kann in die Gleichung (4.4) exakt über das Eichpotential $A^\mu(x)$ gegeben werden und ist zunächst nicht auf konstante Felder beschränkt. Für die Photonenvektoren k_j soll weiterhin die Bedingung aus Gleichung (4.1) gelten. Die Weltlinienkoordinaten werden, wie schon im Fall der 2-Punkt Korrelationsfunktion, durch $x_j^\mu(\tau)$ und $\dot{x}_j^\mu(\tau)$ beschrieben, die im einzelnen von dem Eigenzeitparameter $\tau \in [0, T]$ abhängig sind. Im Vergleich zur 2-Punkt Funktion unterscheidet sich die Grundgleichung für die 3-Punkt Funktion somit nur durch einen zusätzlichen Term,

$$\int_0^T d\tau_j \dot{x}_j^\mu e^{ik_j x_j} \quad \text{mit} \quad x_j^\mu = x^\mu(\tau_j),$$

der das zusätzliche Photon repräsentiert. Im nächsten Schritt wird der Tensor aus Gleichung (4.4) mit den entsprechenden Polarisationsvektoren ϵ_j der einzelnen Photonen kontrahiert, was zum Beispiel im Falle eines verschwindenden externen Feldes auf

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Pi_{\text{vac}} = (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \int \mathcal{D}x \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2 \right) \epsilon_j \dot{x}_j e^{ik_j x_j}$$

führt. Um diese Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen zu können, wird der Integrand als Exponentialfunktion geschrieben, was im Weiteren durch $\ln(\epsilon_j)$ gekenn-

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

zeichnet wird. Eine entsprechende Vorgehensweise hat Schubert schon in [45] zur Lösung der 2-Punkt Funktion angewendet. Die Vorgehensweise ist in

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{Vac}}^{\mu\nu\kappa} &= (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \int \mathcal{D}x \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2 + \sum_{j=1}^3 \epsilon_j \dot{x}_j + \sum_{j=1}^3 i k_j x_j \right) \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)} \\
 &\sim \exp \left(-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{1}{4} \dot{x}^2 - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j \dot{x} \delta(\tau - \tau_j) - \sum_{j=1}^3 i k_j x \delta(\tau - \tau_j) \right\} \right) \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)} \\
 &\sim \exp \left(-\int_0^T d\tau \left\{ -\frac{1}{4} x \partial_\tau^2 x - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j \partial_\tau x \delta(\tau - \tau_j) - \sum_{j=1}^3 i k_j x \delta(\tau - \tau_j) \right\} \right) \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)} \\
 &\sim \exp \left\{ -\int_0^T d\tau \left(\frac{1}{2} x - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j (-\partial_\tau^{-1}) \delta(\tau - \tau_j) - i \sum_{j=1}^3 k_j (-\partial_\tau^{-2}) \delta(\tau - \tau_j) \right) (-\partial_\tau^2) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\frac{1}{2} x - \sum_{s=1}^3 \epsilon_s (-\partial_\tau^{-1}) \delta(\tau - \tau_s) - i \sum_{s=1}^3 k_s (-\partial_\tau^{-2}) \delta(\tau - \tau_s) \right) \right\} \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)}
 \end{aligned}$$

formal dargestellt. Dabei treten verschiedene Ableitungen nach dem Eigenzeitparameter τ auf, die nach

$$G_{B_{12}} = \langle \tau_1 | \partial^{-2} | \tau_2 \rangle$$

als feldfreie Greensche Funktion bezeichnet werden [38]. Unter Anwesenheit eines externen Feldes definiert sich die Greensche Funktion (Vergleich Anhang C) über:

$$\mathcal{G}_{B_{12}} = \langle \tau_1 | (\partial^2 - 2iF\partial)^{-1} | \tau_2 \rangle.$$

Somit ergibt sich nach Anwendung der quadratischen Ergänzung, sowie unter Verwendung der Greenschen Funktion $G_{B_{ij}}$ die Gleichung

$$\Pi_{\text{Vac}}^{\mu\nu\kappa} \sim \exp \left(\sum_{j,s=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} k_j G_{js} k_s + i k_j \dot{G}_{js} \epsilon_s + \frac{1}{2} \epsilon_j \ddot{G}_{js} \epsilon_s \right\} \right) \Big|_{\text{lin}(\epsilon_j)}, \quad (4.5)$$

in der im Fall des 3-Punkt-Korrelators die Summation von 1 bis 3 oder je nach Notation von 0 bis 2 verläuft. Wie schon im Fall der 2-Punkt Funktion ist die Struktur der Gleichung im feldfreien Fall und unter Berücksichtigung eines externen Magnetfeldes identisch. Es muss nur die Ersetzungsregel $G_B \rightarrow \mathcal{G}_B$ angewendet werden, was ausgehend von Gleichung (4.5) entsprechend vollzogen werden kann. Im Weiteren soll das einfallende Photon durch

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

den Index 1 und die beiden ausfallenden Photonen mit 2 und 3 gekennzeichnet werden. Für die Polarisationsvektor des einfallenden Photons ϵ_1 gilt für den Fall (4.3):

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_{2,3} = 0.$$

Mit der Linearität in ϵ_j (Gleichung (4.1)), der Orthogonalität der Polarisationsvektoren und den Eigenschaften von \mathcal{G}_{Bij} lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{j,s=1}^3 \epsilon_j \ddot{\mathcal{G}}_{js} \epsilon_s = 2\epsilon_2 \ddot{\mathcal{G}}_{23} \epsilon_3$$

gilt. Damit ergibt sich aus Gleichung (4.5):

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Pi_{\text{Field}} \sim \exp \left(\sum_{j,s=1}^3 \frac{1}{2} k_j \mathcal{G}_{js} k_s \right) \left(1 + i \sum_{j=1}^3 k_j \dot{\mathcal{G}}_{j1} \epsilon_1 \right) \left(1 + \epsilon_2 \ddot{\mathcal{G}}_{23} \epsilon_3 \right).$$

Einschließlich aller Vorfaktoren und Integrationen erhält man somit:

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Pi_{\text{Field}} = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^3 k_j \mathcal{G}_{js} k_s \right) \left(i \sum_{j=1}^3 k_j \dot{\mathcal{G}}_{j1} \epsilon_1 \right) \epsilon_2 \ddot{\mathcal{G}}_{23} \epsilon_3. \quad (4.6)$$

Hierbei ist von der Regel Gebrauch gemacht worden, dass in jedem Summanden die entsprechenden Polarisationsvektoren nur linear auftreten dürfen. Für die Greensche Funktion \mathcal{G}_{ij} unter Berücksichtigung eines reinen Magnetfeldes ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij} &= \frac{T}{2Z^2} \left(\frac{Z}{\sin Z} e^{-iZ\dot{G}_{ij}} + iZ\dot{G}_{ij} - 1 \right) \\ &= \frac{T}{2} \left\{ - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{T} G_{ij} \right) \mathbb{1} + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{ij}}{z \sinh z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{T} G_{ij} \right) \Lambda^2 \right\}. \end{aligned}$$

Darin ist das Feld in $Z^{\mu\nu} = eF^{\mu\nu}T$ enthalten, was im Weiteren durch den dimensionslosen Tensor $\Lambda^{\mu\nu}$, mit $F^{\mu\nu} = B \cdot \Lambda^{\mu\nu}$, ausgedrückt werden soll. Werden in den Ausdruck \mathcal{G}_{ij} die Indizes $i \leftrightarrow j$ sowie $\mu \leftrightarrow \nu$ (Indizes wurden zur besseren Übersichtlichkeit nicht explizit hingeschrieben) vertauscht, ist zu erkennen, dass es sich bei der Funktion um eine gerade Funktion handelt, weshalb

$$\mathcal{G}_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = S_{ij}$$

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

gilt. Hierbei bezeichnet S_{ij} den symmetrischen und A_{ij} den antisymmetrischen Anteil der Greenschen Funktion. Identische Symmetriebetrachtungen können auch für die Ableitungen der Greenschen Funktion durchgeführt werden, was im Fall $\dot{\mathcal{G}}_{ij}$ auf,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{G}}_{ij} &= \frac{i}{Z} \left(\frac{Z}{\sin Z} e^{-iZ\dot{G}_{ij}} - 1 \right) = \dot{S}_{ij} + \dot{A}_{ij} \\ &= \left\{ \dot{G}_{ij} \mathbb{1} + \left(\dot{G}_{ij} - \frac{\sinh z \dot{G}_{ij}}{\sinh z} \right) \Lambda^2 \right\} + i \left\{ - \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{ij}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \Lambda \right\}\end{aligned}$$

führt. Somit lässt sich die Gleichung (4.6) auch schreiben als:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \delta \Pi &\sim i \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^3 k_j \mathcal{G}_{js} k_s \right) \left(k_1 \dot{\mathcal{G}}_{11} \epsilon_1 + k_2 \dot{\mathcal{G}}_{21} \epsilon_1 + k_3 \dot{\mathcal{G}}_{31} \epsilon_1 \right) \epsilon_2 \ddot{\mathcal{G}}_{23} \epsilon_3 \\ &\sim i \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^3 \frac{T}{2} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{ij}}{z \sinh z} + \frac{2}{T} G_{ij} \right) k_j \Lambda^2 k_s \right) \ddot{G}_{23} \\ &\times (-i) \left(\left(\frac{\cosh z}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_1 + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_2 + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_3 \right).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Die τ -unabhängigen Terme im Exponenten entfallen aufgrund der Energieerhaltung:

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 0.$$

Schon im Rahmen der 2-Punkt Funktion hat Schubert vorgeschlagen, alle auftretenden Terme mit \ddot{G}_{ij} durch partielle Integration zu entfernen, weil die darin enthaltene Delta-

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

funktion eine analytische Betrachtung deutlich schwieriger machen würde. Aus Gleichung (4.7) ergibt sich demzufolge

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \delta \Pi = & (-ie)^3 \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \frac{1}{T} i \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^3 \left(\frac{T \cosh z \dot{G}_{ij}}{z \sinh z} + G_{ij} \right) k_j \Lambda^2 k_s \right) \\
 & \times i \dot{G}_{23} \left(\dot{G}_{23} - \frac{\sinh z \dot{G}_{23}}{\sinh z} \right) k_2 \Lambda^2 k_3 \\
 & \times \left(\left(\frac{\cosh z}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_1 + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_2 + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_3 \right) \\
 & + i \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_3 \left(\dot{G}_{21} - \frac{\sinh z \dot{G}_{21}}{\sinh z} \right) k_2 \Lambda^2 k_1 \\
 & - i \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_2 \left(\dot{G}_{31} - \frac{\sinh z \dot{G}_{31}}{\sinh z} \right) k_3 \Lambda^2 k_1 \\
 & + \frac{i}{2} \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_1 \left(\left(\dot{G}_{21} - \frac{\sinh z \dot{G}_{21}}{\sinh z} \right) k_2 \Lambda^2 k_1 - \left(\dot{G}_{31} - \frac{\sinh z \dot{G}_{31}}{\sinh z} \right) k_3 \Lambda^2 k_1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit $z = eBT$ und $\Lambda \equiv \Lambda^{\mu\nu}$. Bei den Ableitungen der Greenschen Funktion nach der Eigenzeit τ_j gilt immer $\ddot{G}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \dot{G}_{ij}$. Das bedeutet, die Differentiation erfolgt nach der Eigenzeit des ersten Index. Diese Regel ist insbesondere bei der partiellen Integration über τ_3 zu beachten. Weiter wurden die Terme mit $\cosh(z)$ symmetrisiert, weil in diesem Fall eine Integration über τ_2 und τ_3 möglich ist. Außerdem vereinfacht die Symmetrisierung die partielle Integration nach einer Eigenzeitkomponente, weil in diesem Fall die Antisymmetrie der Greenschen Funktionen \dot{G}_{Bij} in den Komponenten i, j berücksichtigt wird. Unter

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Greenschen Funktion und deren Ableitungen lässt sich die Gleichung (4.8) auch schreiben als:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \delta \Pi \sim & - \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^3 \left(\frac{T}{2} \frac{\cosh z \dot{G}_{ij}}{z \sinh z} + G_{ij} \right) k_j \Lambda^2 k_s \right) \\
 & \times \dot{G}_{23} \left(\dot{G}_{23} - \frac{\sinh z \dot{G}_{23}}{\sinh z} \right) k_2 \Lambda^2 k_3 \\
 & \times \left(\left(\frac{\cosh z}{\sinh z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_1 + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_2 + \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_3 \right) \\
 & - \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_3 \left(\dot{G}_{12} - \frac{\sinh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} \right) k_1 \Lambda^2 k_2 \\
 & + \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_2 \left(\dot{G}_{13} - \frac{\sinh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} \right) k_1 \Lambda^2 k_3 \\
 & + \frac{1}{2} \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \epsilon_1 \Lambda k_1 \left(- \left(\dot{G}_{12} - \frac{\sinh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} \right) k_1 \Lambda^2 k_2 + \left(\dot{G}_{13} - \frac{\sinh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} \right) k_1 \Lambda^2 k_3 \right).
 \end{aligned}$$

Verwendet man die Bedingungen

$$k_1 = -\omega_1 n,$$

$$k_{2,3} = \omega_{2,3} n$$

und

$$n \Lambda^2 n = -1,$$

$$\epsilon_1 \Lambda n = 1$$

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

so ergibt sich als Gleichung für den Vergleich mit den später im Rahmen des Weltlinienformalismus numerisch ermittelten Werten:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \delta \Pi = & (-ie)^3 \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \frac{1}{T} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \prod_{j=1}^3 \int_0^T d\tau_j \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^3 \left(\frac{T}{2} \frac{\cosh z \dot{G}_{ij}}{z \sinh z} + G_{ij} \right) k_j \Lambda^2 k_s \right) \\
 & \times \dot{G}_{23} \left(\dot{G}_{23} - \frac{\sinh z \dot{G}_{23}}{\sinh z} \right) \left(- \left(\frac{\cosh z}{\sinh z} \right) + \frac{\omega_2}{\omega_1} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} \right) + \frac{\omega_3}{\omega_1} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} \right) \right) \\
 & + \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \left(\dot{G}_{12} - \frac{\sinh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} \right) - \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \left(\dot{G}_{13} - \frac{\sinh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh z}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \left(\dot{G}_{12} - \frac{\sinh z \dot{G}_{12}}{\sinh z} \right) - \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\dot{G}_{13} - \frac{\sinh z \dot{G}_{13}}{\sinh z} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Diese Darstellung kann mit Standardverfahren für einen weiten Parameterbereich direkt numerisch integriert werden. Dieses Resultat verallgemeinert die bisherigen Ergebnisse zum Photonsplitting [28; 47] auf den Fall der skalaren QED.

4.1.1. 3-Punkt Korrelationsfunktion für kleine Eigenzeiten

Schon im Rahmen der 2-Punkt Funktion war eine Betrachtung der entsprechenden analytischen Gleichungen im konstanten Magnetfeld für kleine Eigenzeiten T notwendig. Dies lag vor allem daran, dass für diese Korrelationsfunktion das Eigenzeitintegral für kleine Parameter T ein divergentes Verhalten aufwies. Auf Niveau der 3-Punkt Funktion kommt es zwar nicht zu einem solchen divergenten Verhalten, jedoch ist ein Verständnis des Verhaltens der Gleichungen im Grenzbereich kleiner Werte T gerade für die spätere numerische Umsetzung von Vorteil. Als Ausgangspunkt dient Gleichung (4.9), die in einer vereinfachten Form auch als:

$$\Pi_{3P} = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \cdot T^3 \int_0^1 d\tau_2 \int_0^1 d\tau_3 I_{3P} \tag{4.10}$$

geschrieben werden kann. Dabei bezeichnet I_{3P} den Integrationskern, der im einzelnen noch von den beiden Parametern τ_2 und τ_3 , sowie T abhängt. Außerdem wurde noch die

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Transformation $\tau_j \rightarrow T\tau_j$ ausgeführt, damit die einzelnen Integrale unabhängig von der Dimension werden. Im Genaueren ergibt sich somit für den Integrationskern:

$$\begin{aligned}
 I_{3P} = & \frac{eBT}{\sinh(eBT)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j \left(TG_{ij} + \frac{1}{2eB} \frac{\cosh(eBT\dot{G}_{ij})}{\sinh(eBT)} - \frac{T}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{(eBT)^2} \right) \right) \right\} \\
 & \times \left\{ \dot{G}_{23} \left(\dot{G}_{23} - \frac{\sinh(eBT\dot{G}_{23})}{\sinh eBT} \right) \left(-\frac{\cosh(eBT)}{\sinh eBT} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\cosh(eBT\dot{G}_{12})}{\sinh(eBT)} + \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\cosh(eBT\dot{G}_{13})}{\sinh(eBT)} \right) \right. \\
 & + \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh(eBT\dot{G}_{13})}{\sinh(eBT)} - \frac{1}{eBT} \right) \left(\dot{G}_{12} - \frac{\sinh(eBT\dot{G}_{12})}{\sinh(eBT)} \right) \\
 & - \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh(eBT\dot{G}_{12})}{\sinh(eBT)} - \frac{1}{eBT} \right) \left(\dot{G}_{13} - \frac{\sinh(eBT\dot{G}_{13})}{\sinh(eBT)} \right) \\
 & \left. - \frac{1}{2} \dot{G}_{23} \left(\frac{\cosh(eBT)}{\sinh(eBT)} - \frac{1}{eBT} \right) \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \left(\dot{G}_{12} - \frac{\sinh(eBT\dot{G}_{12})}{\sinh(eBT)} \right) - \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\dot{G}_{13} - \frac{\sinh(eBT\dot{G}_{13})}{\sinh(eBT)} \right) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (4.9) kann außerdem noch die Integration über den Parameter τ_1 , des einfallenden Photons, aufgrund der Translationsinvarianz auf der Weltlinie weggelassen werden. Genauer bedeutet dies, dass der Wert für τ_1 auf T , beziehungsweise dimensionell reskaliert auf eins gesetzt werden kann. Um eine spätere Entwicklung des Ausdrucks um kleine Eigenzeiten zu erleichtern, wurde der Exponent durch einen zusätzlichen Term (rot) erweitert, der sich Aufgrund der geltenden Energie- und Impulserhaltungssätze zu null ergibt. Für die feldunabhängigen Greenschen Funktionen G_{Bij} und deren Ableitungen gilt nach Ausführung der Transformation der Weltlinienkoordinaten τ_j mit $\tau_j \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned}
 G_{i,j} &= |\tau_i - \tau_j| - (\tau_i - \tau_j)^2, \\
 \dot{G}_{i,j} &= \text{sign}(\tau_i - \tau_j) - 2(\tau_i - \tau_j).
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist außerdem, dass für die Energien ω_j der einzelnen Photonen, die Ersetzung $\bar{\omega}_1 = \omega_1$ und $\bar{\omega}_{2,3} = -\omega_{2,3}$ vorgenommen wurde, da sich in diesem Fall die Summen über die Frequenzen vereinfacht aufschreiben lassen. Eine Entwicklung des Integrationskerns I_{3P} um kleine Eigenzeiten T führt auf einen Polynomausdruck der Art:

$$I_{3P} = aT + bT^2 + cT^3 + dT^4 + O(T^5).$$

Für die Koeffizienten a, b, c, d ergeben sich die Gleichungen

$$a = -\frac{2eB(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)(1 - 4G_{2,3})G_{2,3}}{3\omega_1},$$

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

$$b = 0,$$

$$\begin{aligned} c = & \frac{eB^3 \dot{G}_{2,3}}{45\omega_1\omega_2\omega_3} \left\{ \omega_1^2 \left(5\omega_3 G_{1,3} \dot{G}_{1,3} - 5\omega_2 G_{1,2} \dot{G}_{1,2} \right) \right. \\ & + \omega_2 \omega_3 \omega_1 \left(-10G_{1,3} \dot{G}_{1,3} + 10G_{1,2} \left((1 - 6G_{1,3}) \dot{G}_{1,2} + 6G_{1,3} \dot{G}_{1,3} \right) + 3G_{2,3} (2G_{2,3} - 1) \dot{G}_{2,3} \right) \\ & \left. + 3\omega_2 \omega_3 G_{2,3} \dot{G}_{2,3} (\omega_2 (-20G_{1,2} - 2G_{2,3} + 1) + \omega_3 (-20G_{1,3} - 2G_{2,3} + 1)) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = & -\frac{eB^3}{270\omega_1} (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) G_{3,2} (4G_{3,2} - 1) \left\{ \bar{\omega}_1^2 (30G_{1,1}^2 - 1) \right. \\ & + \bar{\omega}_1 (\bar{\omega}_2 (60G_{1,2}^2 - 2) + 2\bar{\omega}_3 (30G_{1,3}^2 - 1)) + \bar{\omega}_2^2 (30G_{2,2}^2 - 1) + 2\bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 (30G_{3,2}^2 - 1) \\ & \left. + \bar{\omega}_3^2 (30G_{3,3}^2 - 1) \right\}. \end{aligned}$$

Diese lassen sich aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Greenschen Funktion

$$\dot{G}_{i,j}^2 = 1 - 4G_{i,j}$$

und

$$G_{i,j} = G_{j,i},$$

noch weiter vereinfachen. Durch Ausführung der Integrationen über die Parameter τ_2 und τ_3 ergibt sich letztendlich

$$a = -\frac{1}{45} \frac{eB}{\omega_1} (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3),$$

$$c = -\frac{11}{1890} \frac{(eB)^3}{\omega_1} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3),$$

$$d = -\frac{1}{8100} \frac{(eB)^3}{\omega_1} (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \left\{ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{4}{7} \omega_2 \omega_3 \right\},$$

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

wobei in einem allgemeinen Magnetfeld die führende Ordnung des Polynoms der lineare Teil in der Eigenzeit ist. Unter Annahme eines konstanten Magnetfeldes und unter Forderung der Energieerhaltung $\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$, Vergleich Gleichung (4.1), ergibt sich

$$a = b = d = 0,$$

weshalb der einzige nichtverschwindende Term in der Ordnung T^3 auftritt. Zum Vergleich mit den numerischen Resultaten ergibt sich auf diese Weise die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{3P} &\sim \omega_1\omega_2\omega_3 \cdot T^3 \cdot (\textcolor{red}{a}T + \textcolor{blue}{b}T^2 + \textcolor{green}{c}T^3 + \textcolor{blue}{d}T^4 + \text{O}(T^5)) \\ &\sim -\omega_2\omega_3 \cdot \frac{11}{1890}(eB)^3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \cdot T^6 + \text{O}(T^8) \end{aligned} \quad (4.11)$$

für die Entwicklung der 3-Punkt Korrelationsfunktion um kleine Eigenzeiten.

4.2. Numerische Betrachtung der 3-Punkt Korrelationsfunktion

Um die zu Beginn dieses Kapitels aufgestellten Fragestellungen zu untersuchen, ist eine numerische Umsetzung der 3-Punkt Korrelationsfunktion im Rahmen des Weltlinienformalismus notwendig. Dabei ist es zunächst das Ziel zu überprüfen, ob die analytischen Resultate von Gleichung (4.9) numerisch reproduziert werden können. Im ersten Schritt müssen jedoch die einzelnen Polarisationsvektoren ϵ_j über [49]

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_\perp &\sim \hat{\vec{k}}_1 \times \hat{\vec{B}}, \\ \vec{\epsilon}_\parallel &\sim v^2 \hat{\vec{B}} - \left(\hat{\vec{k}}_1 \cdot \hat{\vec{B}} \right) \hat{\vec{k}}_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

bestimmt werden, in denen die Zeitkomponente als verschwindend klein angenommen wird und somit nur ein räumlicher Anteil übrig bleibt. Bei den Vektoren $\hat{\vec{k}}_1$ und $\hat{\vec{B}}$ handelt es sich um die normierten, räumlichen Vektoren der Propagationsrichtung des einfallenden Photons k_1 , sowie des externen Magnetfeldes \vec{B} . Der skalare Anteil v beschreibt die Phasengeschwindigkeit des einfallenden Photons. Zur Bestimmung der einzelnen Vektoroperationen können die Routinen der GSL-Bibliothek verwendet werden. Ausgehend von

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Gleichung (4.4) werden zunächst die einzelnen Substitutionen in den **Eigenzeiten** τ_j und den **Weltlinienkoordinaten** x_j^μ angewendet:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{3P} &= (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \int \mathcal{D}x \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \int_0^T d\tau_3 \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2 \right) \\
 &\quad \times \{ [\epsilon_1 \dot{x}_1] e^{ik_1 x_1} [\epsilon_2 \dot{x}_2] e^{ik_2 x_2} [\epsilon_3 \dot{x}_3] e^{ik_3 x_3} \} \exp \left(-ie \oint d\tau A_\mu[x] \dot{x}^\mu \right) \quad \tau \rightarrow T\tau \\
 &= (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} T^3 \int \mathcal{D}x \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \int_0^1 d\tau_3 \exp \left(-\frac{1}{4T} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2 \right) \\
 &\quad \times \frac{1}{T^3} \{ [\epsilon_1 \dot{x}_1] e^{ik_1 x_1} [\epsilon_2 \dot{x}_2] e^{ik_2 x_2} [\epsilon_3 \dot{x}_3] e^{ik_3 x_3} \} \exp \left(-ie \oint d\tau A_\mu[x] \dot{x}^\mu \right) \quad x \rightarrow \sqrt{T}y + x_{\text{CM}} \\
 &= (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \int dx_{\text{CM}} \int \mathcal{D}y \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \int_0^1 d\tau_3 \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{y}^2 \right) e^{i(k_1+k_2+k_3)x_{\text{CM}}} \\
 &\quad \times T^{3/2} \left\{ [\epsilon_1 \dot{y}_1] e^{i\sqrt{T}k_1 y_1} [\epsilon_2 \dot{y}_2] e^{i\sqrt{T}k_2 y_2} [\epsilon_3 \dot{y}_3] e^{i\sqrt{T}k_3 y_3} \right\} \exp \left(-ie\sqrt{T} \oint d\tau A_\mu[\sqrt{T}y + x_{\text{CM}}] \dot{y}^\mu \right).
 \end{aligned}$$

Hierdurch werden die Weltlinien an einem Punkt x_{CM} fixiert, sowie die Integrale über τ_j unabhängig von der Eigenzeit T . Für die 3-Punkt Funktion ergibt sich auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{3P} &= (-ie)^3 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^2} \int dx_{\text{CM}} \int \mathcal{D}y \prod_{j=1}^3 \int_0^1 d\tau_j \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{y}^2 \right) e^{i(k_1+k_2+k_3)x_{\text{CM}}} \\
 &\quad \times \left\{ \sqrt{T} [\epsilon_j \dot{y}_j] e^{i\sqrt{T}k_j y_j} \right\} \exp \left(-ie\sqrt{T} \oint d\tau A_\mu[\sqrt{T}y + x_{\text{CM}}] \dot{y}^\mu \right). \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (4.13) dient dabei als Ausgangsgleichung für die nachfolgende Diskretisierung. Die Schritte der Diskretisierung entsprechen hierbei exakt der Vorgehensweise, wie sie schon im Rahmen des 2-Punkt Korrelators ihre Anwendung fand und sollen an dieser Stelle nicht noch einmal explizit erläutert werden. Die weitaus größere Schwierigkeit stellt die Wahl eines geeigneten numerischen Ensembles dar, mit dem die analytischen Resultate von Gleichung (4.9) auch im Rahmen der Simulation wiedergegeben werden können. Der in der Gleichung (4.13) mit **grün** gekennzeichnete Teil enthält durch die Exponentialfunktion einen oszillierenden Anteil, der ein schnelles konvergentes Verhalten der Numerik verhindert und eine höhere Statistik erforderlich macht. Zu erkennen ist dieses Problem vor allem an einem, im Vergleich zu den numerischen Resultaten der 2-Punkt Korrelationsfunktion, sehr viel größeren statistischen Fehler. In Kombination mit der Verwendung von minkowskiwertigen Photonenvektoren innerhalb der einzelnen Routinen ist somit eine

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Vergrößerung des Weltlinienensemble im Vergleich zur 2-Punkt Funktion notwendig. Bei der Simulation der 2-Punkt Funktion wurden ein Ensemble mit einer Größe von 40000 Weltlinien verwendet, die in diesem Fall auch entsprechend konvergente Resultate lieferten. Im Fall des 3-Punkt Korrelators ist eine Erhöhung der Weltlinien auf mindestens 200000 pro Ensemble notwendig, um die Zuverlässigkeit der Numerik zu garantieren. Die Folge einer solchen Vergrößerung ist natürlich ein höherer Rechenaufwand und somit mehr Rechenzeit. Im Nachfolgenden wird die Vorgehensweise der Numerik dargestellt:

- Bestimmung der Polarisationsvektoren ϵ_j aus dem Richtungsvektor \vec{k} des einfallenden Photons und dem Magnetfeld \vec{B} (Gleichung (4.12)),
- numerische Umsetzung der 3-Punkt Funktion mit Hilfe des Weltlinienformalismus, analog zur 2-Punkt Funktion,
- für kleine Eigenzeiten T wird das Nonlinear-least-squares Verfahren durchgeführt, wobei die Kenntnisse aus der Taylor-Reihenentwicklung in der Rechnung berücksichtigt werden. Im Fall eines konstanten Magnetfeldes ist dies in Gleichung (4.11) dargestellt.

Mit der Hilfe des Non-linear-least-square Verfahren (nlls-Verfahren) können die Koeffizienten des Polynoms (4.11) für ein konstantes Magnetfeld bestimmt werden. Um noch einen zusätzlichen Freiheitsgrad einzuführen, der eine Abweichung der numerischen Resultate am Punkt $T = 0$ berücksichtigen soll, werden die einzelnen Datenpunkte an ein Polynom der Art:

$$f(T) = \alpha \cdot T^6 + \beta$$

angenähert. Dabei bezeichnet α den Koeffizienten aus der Gleichung (4.11). Der Koeffizient β kann auch als Maß für die Qualität der numerischen Simulation herangezogen werden, soll doch dieser im Kontinuumslimit gegen den Wert null konvergieren. Zur Durchführung der Simulation wird an die nlls-Routine ein Ensemble von N Punkten $\delta\Pi_{3P}[T_N]$ gegeben, die zuvor mit Hilfe des Weltlinienformalismus bestimmt worden sind. Das Resultat des Fits soll der analytischen Gleichung (4.13) vor Ausführung der Eigenzeitintegration entsprechen. Die Anzahl N der Punkte muss mindestens $N = 2$ entsprechen, da innerhalb des Polynoms zwei Koeffizienten $\{\alpha, \beta\}$ bestimmt werden müssen. Um aus der Routine das optimale Ergebnis zu erhalten, wurde dieses Verfahren $N-2$ mal durchgeführt, woraus wir als Resultat genau so viele Paare $\{\alpha_i, \beta_i\}$ erhielten. Aus diesem Ensemble von Koeffizientenpaaren wurde letztendendes dasjenige gewählt, welches die Forderung:

$$(\alpha_i - c) \rightarrow 0$$

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

am besten erfüllt, wobei c dem analytischen Wert aus Gleichung (4.11) entspricht. Für einen ersten Test wählen wir ein externes Magnetfeld $eB_0 = 0.2$, das deutlich unterhalb der kritischen Feldstärke eB_{CR} liegt. Die Gleichung (4.13) wurde von uns in einem Eigenzeitbereich von $T \in [0, 7.9]$ betrachtet, womit also zunächst auf eine explizite Auswertung des Eigenzeitintegrals verzichtet werden soll. Analog zu den Rechnungen der 2-Punkt Funktion, wählen wir auch im Fall des 3-Punkt Korrelators die Größe des Ensembles mit 40000 Weltlinien, die im einzelnen durch 1000 Weltlinienpunkte gekennzeichnet sind. Das Resultat dieser Simulation ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Um den Einfluss der oszillie-

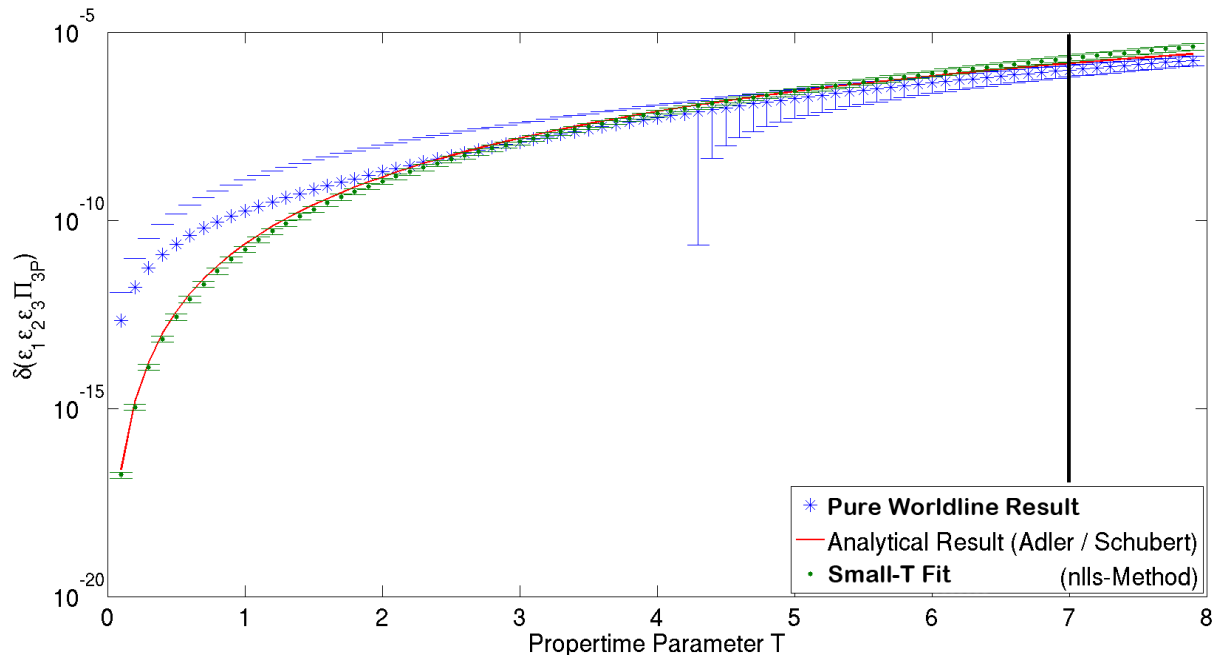


Abbildung 4.2.: Integrand $\delta\Pi_{3P}[eB, T]$ der 3-Punkt Funktion für ein Ensemble von 40000 Weltlinien und einer Feldstärke $eB = 0.2$.

renden Funktionsanteile, die durch die Exponentialfunktionen $\exp(ik_j x_j)$ bestimmt sind, so gering wie möglich zu halten ist das einfallende Photon $k = (0, 0, 0.01, 0.01)$ mit entsprechend geringer Energie gewählt worden. In der Abbildung 4.2 ist zu erkennen, dass vor allem im Bereich kleiner Eigenzeiten T die analytischen Resultate von Schubert und Adler von der Numerik (Pure Worldline Result) zwar im Rahmen des statistischen Fehlers wiedergegeben werden, der zentral Wert jedoch vom analytischen Ergebnis vergleichsweise stark abweicht. Bei der Darstellung der statistischen Fehler der reinen Weltlinienrechnung ist in Abbildung 4.2 zu beachten, dass für Werte unterhalb von $T \approx 4.5$ die untere Grenze den kompletten Darstellungsbereich überdeckt. Aus diesem Grund wurden die entsprechenden Fehlerbalken nicht mehr explizit dargestellt. Auch für die oberen Fehlerbalken ist aufgrund der logarithmischen Skalierung der Ordinatenachse eine spezielle Darstellung gewählt worden. Aus diesem Grund soll zur Stabilisierung der Numerik die Kenntnis über die Entwicklung der analytischen Gleichung für kleine Eigenzeiten (Gleichung (4.11)) im

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

konstanten Magnetfeld mit berücksichtigt werden. Hierzu werden die Koeffizienten mit Hilfe des nlls-Verfahrens, wie schon beschrieben bestimmt und anschließend das Polynom ausgewertet. In der Abbildung 4.2 wurden die Ergebnisse durch die Punkte *Worldline* + *small-T fit* dargestellt. Die Schwierigkeit besteht nun darin einen Übergang zwischen den reinen numerischen Werten und den im Rahmen des nlls-Verfahrens bestimmten zu finden. Eine Möglichkeit besteht darin, die statistischen Fehler der einzelnen Werte miteinander zu Vergleichen, wie es schon im Rahmen der 2-Punkt Funktion geschehen ist und als Übergangswert den Punkt zu definieren, bei welchem der statistische Fehler des nlls-Verfahrens gerade noch kleiner ist als der der reinen Weltlinien Resultate. Jedoch ist diese Methode unzureichend, weshalb in einem späteren Abschnitt noch einmal etwas genauer auf die Bestimmung des Umschaltwertes T_D für die Eigenzeit eingegangen werden soll. In Abbildung 4.2 ist der Übergang zunächst erst einmal über die statistischen Fehler bestimmt worden und liegt bei einem Wert von $T_D = 6.9$ (vertikale schwarze Linie) für ein Ensemble mit 40000 Weltlinien. Eine genauere Blick auf die gefitteten Koeffizienten

Ensemble	$a_{\text{analytisch}}$	a	Δa
40000	$2.33 \cdot 10^{-11}$	$1.71 \cdot 10^{-11}$	$9.4 \cdot 10^{-12}$
200000	$2.33 \cdot 10^{-11}$	$2.18 \cdot 10^{-11}$	$5.3 \cdot 10^{-12}$

Tabelle 4.1.: Ergebnisse für den Counterterm a .

des Polynoms zeigt, dass der Fehler bei ungefähr 55% liegt und somit zu groß für verlässliche Aussagen ist. Somit sollte im nächsten Schritt an der Reduzierung dieses Fehlers gearbeitet werden. Schon die Untersuchungen der 2-Punkt Funktion zeigten, dass eine Verbesserung des Fehlers und somit der Numerik über eine Vergrößerung der Statistik möglich ist. Im Fall der Weltliniennumerik bedeutet dies zunächst einmal mehr Weltlinien in der Simulation zu verwenden. Somit haben wir die Anzahl der Weltlinien auf 200000 erhöht, was nach Tabelle 4.1 zu einer Verbesserung des Fehlers auf 24% führt. In Abbildung 4.3 ist demzufolge zu erkennen, dass der Übergang zwischen den einzelnen Werten sich zu $T_D = 0.7$ verschiebt und somit im Ganzen eine bessere Zuverlässigkeit der Numerik vorliegt. Zu erkennen ist diese Tatsache auch an der Kurve der Weltlinienrechnungen, die die analytischen Werte bei dieser Statistik nun bei wesentlich kleineren Eigenzeiten approximiert. Zusammenfassend ist demzufolge aus den ersten Rechnungen zu schließen, dass ein Ensemble mit nur 40000 Weltlinien nicht ausreichend ist, um die analytischen Ergebnisse von Schubert und Adler zuverlässig numerisch wiederzugeben. Diese Tatsache ist eine direkte Folge der zusätzlichen oszillierenden Funktion in Gleichung (4.13). Somit lässt sich schlussfolgern, dass eine Anwendung des Weltlinienformalismus zur Berechnung höherwertiger Korrelationsfunktionen prinzipiell möglich ist unter folgenden Berücksichtigungen:

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

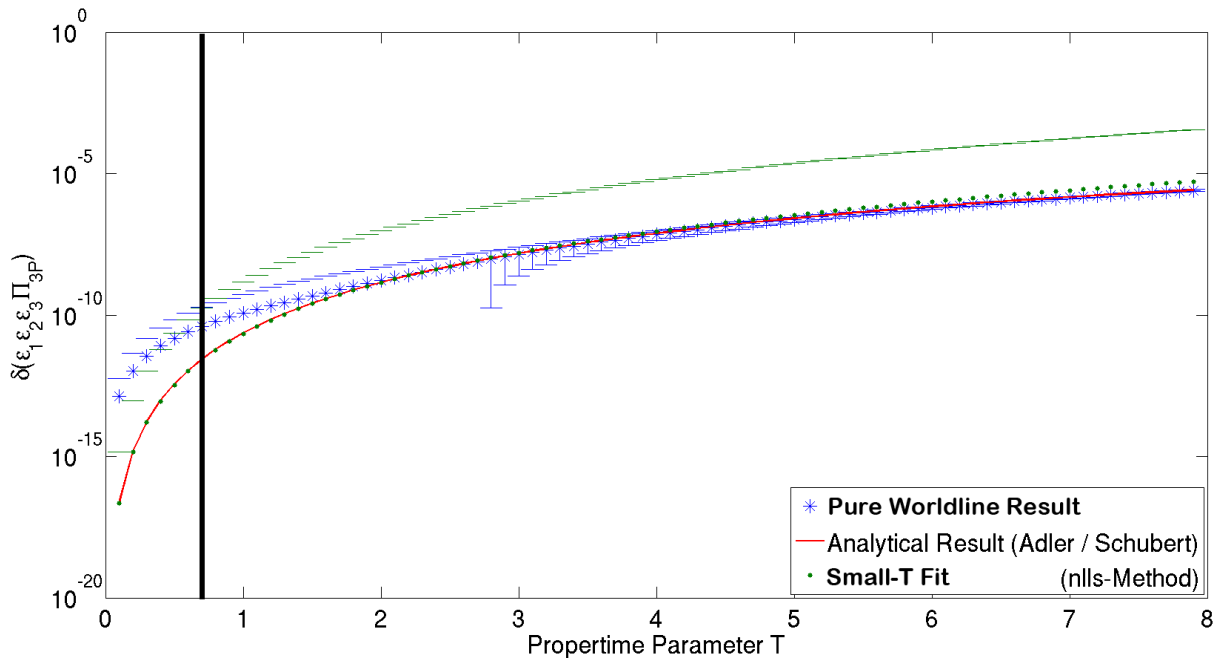


Abbildung 4.3.: Integrand $\delta\Pi_{3P}[eB, T]$ der 3-Punkt Funktion für ein Ensemble von 200000 Weltlinien und einer Feldstärke $eB = 0.2$.

- Anpassung bestimmter physikalischer Parameter wie Energie und Impuls oder auch der Feldstärke um ein besseres Signal zu erreichen.
- Vergrößerung der Statistik um zusätzliche oszillierende Anteile auszugleichen.
- Eventuelle Entwicklung für kleine Eigenzeiten und Hinzunahme von analytischen (Entwicklung um kleine Eigenzeiten T) Informationen im konstanten Feld, zur Stabilisierung des Algorithmus

4.2.1. Bestimmung der dynamischen Grenze T_D

Als dynamische Grenze (Umschaltzeitpunkt) T_D soll der Übergang zwischen den Resultaten des Weltlinienformalismus und den im Rahmen des nlls-Verfahrens bestimmten Polynoms bezeichnet werden. Wie schon im Vorangegangenen erläutert, kann diese Grenze mit Hilfe eines Vergleiches der statistischen Fehler der einzelnen Punkte erreicht werden. Im Fall der 2-Punkt Funktion, wo die Entwicklung für kleine Eigenzeiten T zur Beseitigung einer tatsächlichen Divergenz des Integrals und zur Renormierung verwendet worden ist, kann diese Vorgehensweise als eine gute Möglichkeit angesehen werden zusätzliche analytische Information über das Eigenzeit-Integral zu verwenden. Im Fall der 2-Punkt Funktion haben wir mit Hilfe dieser Entwicklung Counterterme bestimmt, die zur Beseitigung der Divergenz verwendet werden können. Im Fall der 3-Punkt Korrelationsfunktion existiert im strengen Sinn keine Divergenz des Integrals für kleine Eigenzeiten T . Die Entwicklung

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

kann jedoch in diesem Fall dazu verwendet werden, um den auftretenden systematischen Fehler der Numerik abzufangen und somit die Simulation zu stabilisieren. Dieser Fehler tritt vor allem auf, wenn mit Hilfe eines numerischen Verfahrens wie dem Weltlinienformalismus versucht wird, Werte zu bestimmen, die nahe Null liegen. In diesem Fall ist der Vergleich der statistischen Fehler zur Bestimmung der Grenze T_D nur eine unzureichende Möglichkeit. Das Problem liegt darin, dass das resultierende T_D aus dieser Methode vergleichsweise groß ist und somit gerade bei inhomogenen Feldern die Gefahr besteht das eventuelle Effekte durch die analytische Näherung überdeckt werden. Es ist somit eine Methode erforderlich, die schon bei wesentlich kleineren Eigenzeiten den Punkt T_D bestimmt. Dies kann ermöglicht werden, indem der Übergang mit Hilfe des Schnittpunktes oder minimalsten Abstands zwischen der Kurve des nlls-Verfahrens und der Weltlinienrechnung bestimmt wird. In Abbildung 4.4(a) sind die Resultate der Weltliniensimulation

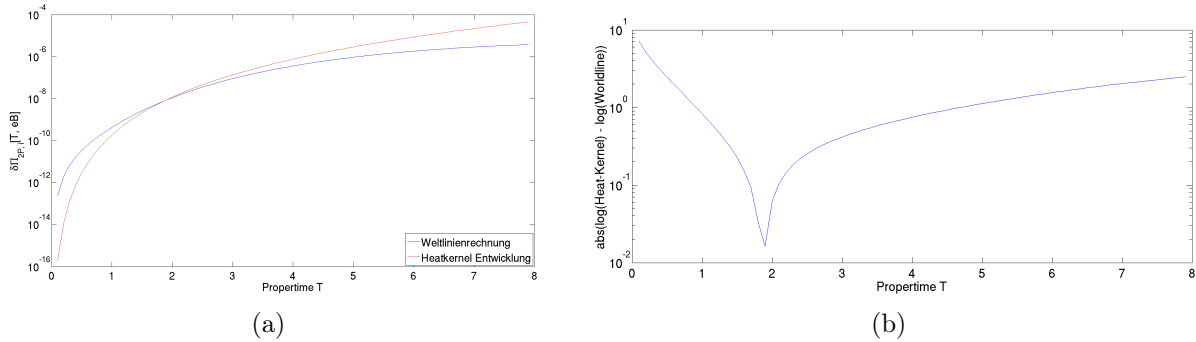


Abbildung 4.4.: Rechnungen für den Integrand $\delta\Pi_{3P}$ der 3-Punkt Funktion bei konstanten magnetischen Feld mit $eB = 0.2$ und ein Ensemble von 200000 Weltlinien. Der Impulsvektor ist mit $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt worden, wobei ein Teilungsverhältnis von 1 : 1 verwendet wird. Abbildung 4.4(a) zeigt den Vergleich zwischen der Entwicklung für kleine Eigenzeiten und der Weltlinienrechnung und Abbildung 4.4(b) die daraus resultierende Bestimmung des Umschaltpunktes T_D .

durch die **blaue** und die des nlls-Verfahrens durch die **rote** Kurve dargestellt. Es ist zu erkennen, dass zwischen den beiden Kurven ein Schnittpunkt im Bereich um $T = 2.0$ existiert. Dieser Schnittpunkt oder minimale Abstand der beiden Kurven kann nun über die Gleichung:

$$f = |\ln(\Pi_{3P,i}^{\text{Entwicklung}}) - \ln(\Pi_{3P,i}^{\text{Weltlinie}})| \quad (4.14)$$

bestimmt werden, was zunächst auf die Kurve aus Abbildung 4.4(b) führte. Der minimale Abstand entspricht somit dem Minimum der Funktion (4.14), welches im Beispiel aus Abbildung 4.4(a) bei $T = 1.9$ zu finden ist und somit der dynamischen Grenze T_D entspricht.

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

4.2.2. Optimierung des Parameterbereiches

In den ersten Rechnungen zur 3-Punkt Korrelationsfunktion konnte gezeigt werden, dass für eine gute Approximation der analytischen Rechnungen nach Schubert und Adler eine Vergrößerung der Statistik notwendig ist. Bei den nachfolgenden Ergebnissen handelt es sich um reine Weltlinienrechnungen, die mit Hilfe der Entwicklung um kleine Eigenzeiten stabilisiert worden sind. Doch inwieweit haben die physikalischen Parameter, wie Energie ω , Impuls \vec{k} , oder auch die Stärke des externen Magnetfeldes eB Einfluss auf die Simulation. In den Rechnungen aus den Abbildungen 4.2 und 4.3 wurde die Energie des einfallenden Photons ω_1 mit $\omega_1 = 0.01$ und demzufolge aufgrund der on-shell Bedingung der Impuls in e_3 -Richtung analog gewählt. Die Stärke des externen Feldes liegt ebenfalls deutlich unterhalb der kritischen Feldstärke und ist mit $eB_0 = 0.2$ festgelegt. Im Nachfolgenden soll nun untersucht werden in welchen Parameterbereichen die Numerik verlässlich ist. Außerdem ist es ein Ziel zu verstehen, wie der Algorithmus auf die Abänderung einzelner Parameter reagiert. Darüber werden die Grenzen der Numerik aufgezeigt. Alle Betrachtungen erfolgen zunächst unter Berücksichtigung eines konstanten Magnetfeldes, weil nur für diese Feldkonfiguration analytische Vergleichslösungen vorhanden sind. Im späteren sollen diese Erkenntnisse auch helfen die Rechnungen im räumlich inhomogenen Magnetfeld zu verstehen. Zunächst sollen Impuls und Energie wie in den vorangegangenen Rechnungen mit $\omega = k = 0.01$ verwendet und lediglich die Stärke eB_0 des externen Feldes variiert werden. Nach

$$\delta\Pi_{3P,i} = \delta\Pi_{3P,i}^{\text{Vacuum}} \cdot \exp\left(-ie \oint A^\mu \dot{x}_\mu\right)$$

setzt sich die numerische Gleichung aus einem Vakuumanteil $\delta\Pi_{3P,i}^{\text{Vacuum}}$, der von einer Änderung der Feldstärke unberührt bleibt und dem Wilsonloop zusammen, der die vollständige Information des externen Feldes trägt. Der statistische Fehler wird maßgeblich vom Vakuumanteil bestimmt, da nur in diesem Teil der Gleichung minkowskiwertige Größen, wie die Impulse k_j , sowie oszillierende Anteile $\exp(ik_j x_j)$ zu berücksichtigen sind. Bei dem Wilsonloop handelt es sich zwar auch um eine oszillierende Funktion, jedoch kann diese durch die Numerik und auch aufgrund der Tatsache, dass keine minkowskiwertigen Größen zu berücksichtigen sind, gut ausgewertet werden. Im einzelnen bedeutet dies, dass sich der Fehler durch eine Vergrößerung der Feldstärke verringern sollte. In Abbildung 4.5 ist der statistische Fehler in Abhängigkeit von der Feldstärke dargestellt. Diese variiert dabei in einem Bereich von $eB \in [0.1, 0.8]$, wobei eine Feldstärke von $eB_0 = 0.8$ genau 80% der kritischen Feldstärke entspricht. Es ist zu erkennen, dass sich mit stärker werdendem Magnetfeld der statistische Fehler für einen bestimmten Wert T verringert, was die obige Annahmen bestätigt. Über die Qualität der Resultate in Bezug auf die Reproduzierbarkeit

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

der analytischen Rechnungen lässt dieses Ergebnis jedoch noch keine Aussage zu, sondern es zeigt lediglich auf, dass zur Verringerung der statistischen Fehler das Feld vergrößert werden kann. Für kleine Eigenzeiten T bewegt sich der Fehler in einem Bereich von 20 -

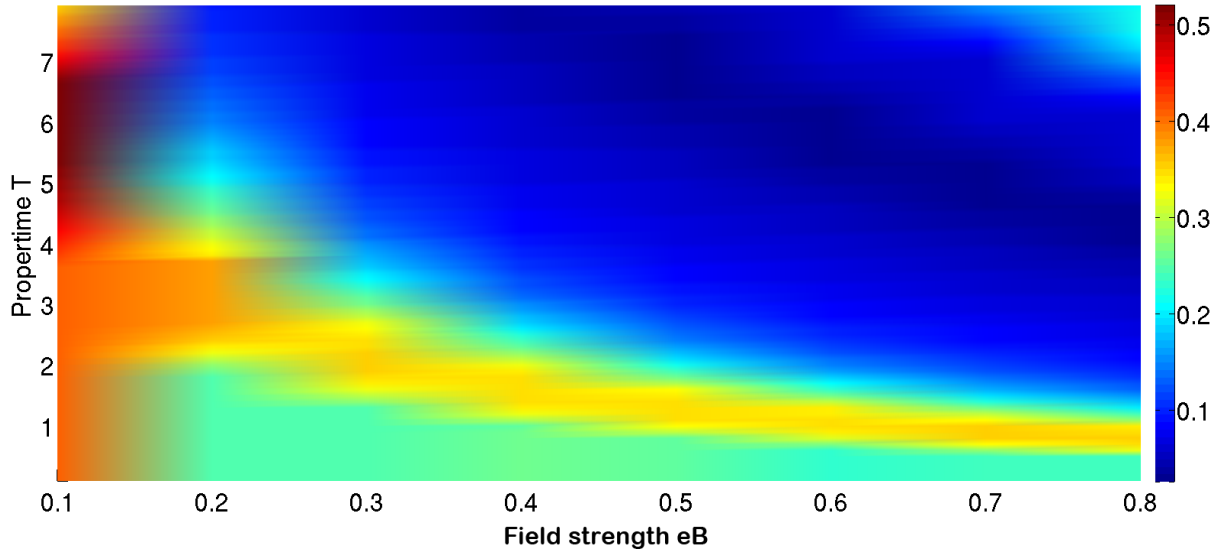


Abbildung 4.5.: Numerischer Fehler in Prozent ($0.1 \equiv 10\%$) des Integranden $\delta\Pi_{3P}$ der 3-Punkt Funktion in Abhängigkeit von der Feldstärke eB und einem Photonenvektor $k = (0, 0, 0.01, 0.01)$ (Teilungsverhältnis 1:1) bei einem Ensemble von 200000 Weltlinien.

40 % und fällt für größer werdendes T auf unter 10 % ab. Ein ähnliches Verhalten weist auch die dynamische Grenze T_D auf, die für $eB = 0.1$ bei $T_D = 6.0$ liegt jedoch sich schon bei einer Feldstärke von $eB = 0.4$ auf $T_D = 1.9$ verringert. Doch wie wirkt sich eine Variation der Feldstärke auf die Weltlinienresultate der 3-Punkt Funktion im Vergleich zu den analytischen Rechnungen aus? In Abbildung 4.6 ist das Verhältnis der Numerik in Bezug auf die analytischen Resultate in Abhängigkeit von der Eigenzeit T und der Feldstärke eB dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die optimale Feldstärke bei ungefähr $eB = 0.4$ liegt, da in diesem Fall ein Großteil des Verhältnisses um eins zu finden ist. Im Weiteren erkennt man, dass in den Grenzbereichen der Feldstärke bei $eB_0 = 0.1$ und $eB_0 = 0.8$ immer mehr numerische Werte von den analytisch zu erwartenden abweichen. In Abbildung 4.7(b) ist der Verlauf von $\delta\Pi_{3P}$ in Abhängigkeit von der Eigenzeit für $eB = 0.4$ explizit dargestellt. Dabei wird die optimale Feldstärke dadurch charakterisiert, dass in der Umgebung von $\delta\Pi_{3P, \max}$ eine gute Approximation der analytischen Vergleichswerte nach Schubert und Adler vorliegt. Bei den in den Abbildungen 4.2 und 4.3 dargestellten Verläufe des Integrationskerns I_{3P} der 3-Punkt Funktion wurden zum besseren Vergleich

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

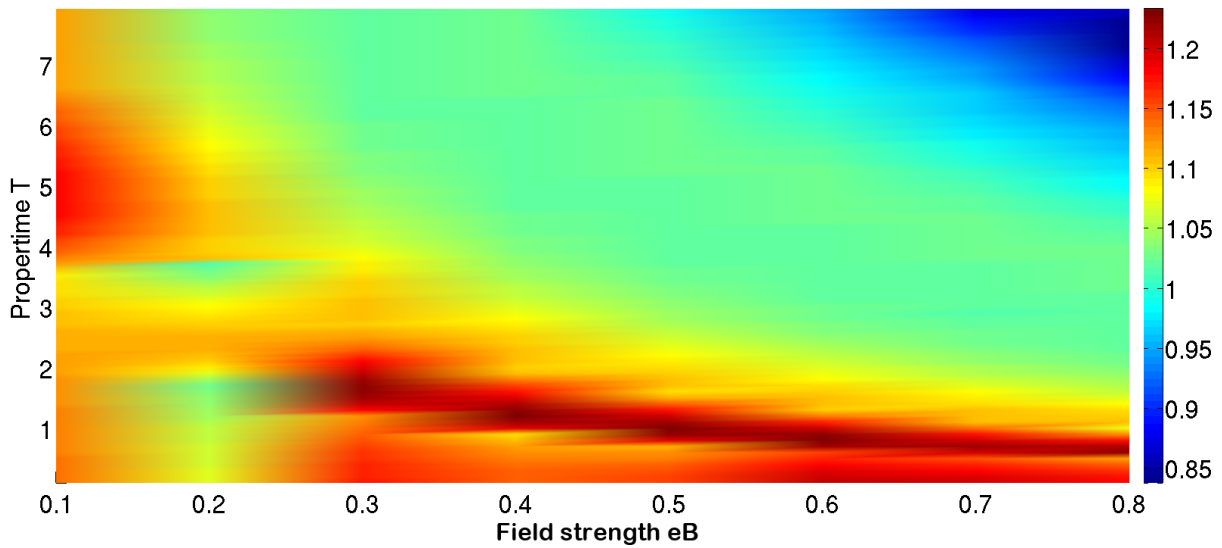


Abbildung 4.6.: Verhältnis zwischen den numerischen Ergebnissen aus den Weltlinienrechnungen (pure worldline result + small-T fit) mit den analytischen Ergebnissen für den Fall der sQED für $\omega_1 = 0.01$ bei einem Teilungsverhältnis des Photonimpulses von 1:1 mit einem Ensemble von 200000 Weltlinien.

mit den analytischen Rechnungen der Vorfaktor $\exp\{-m^2 T\}$ zunächst weggelassen. Im Genaueren entspricht der Integrationskern (Gleichung (4.4))

$$\delta\Pi_{3P} = \frac{1}{T^3} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi)^2} \langle \dots \rangle, \quad (4.15)$$

wobei es sich bei $\langle \dots \rangle$ um die Funktionen aus den Abbildungen 4.2 und 4.3 handelt. Der Einfluss dieses zusätzlichen Vorfaktors ist in der Abbildung 4.7 explizit gezeigt. Wie schon im Fall der 2-Punkt Funktion, erzwingt die exponentielle Massendämpfung, dass gelten muss:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \delta\Pi_{3P} = 0.$$

In Abbildung 4.7(a) ist das Ergebnis der Weltlinienrechnung, in Gleichung (4.15) mit $\langle \dots \rangle$ bezeichnet, für verschiedene Feldstärken dargestellt. Dabei liegt das Signal für $eB = 0.4$ (braun) deutlich oberhalb der Signale für die Feldstärken mit $eB = 0.1$ (blau) oder $eB = 0.2$ (grün). In Abbildung 4.7(b) ist die Funktion $\delta\Pi_{3P}$ nach Gleichung (4.15) dargestellt, dabei ist eine gute Approximation der Rechnungen nach Schubert und Adler (rot) zu erkennen. Die Abweichung der Weltlinienrechnung von den analytischen Resultaten liegt innerhalb der statistischen Fehlergrenzen und könnte wohl durch eine Vergrößerung des Weltlinienensembles verringert werden. Es ist an dieser Stelle jedoch zu berücksichtigen, dass eine Vergrößerung der Statistik immer einhergeht mit einer Erhöhung der Rechenzeit und der erforderlichen Hardwareressourcen. Somit muss bei der Wahl des En-

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

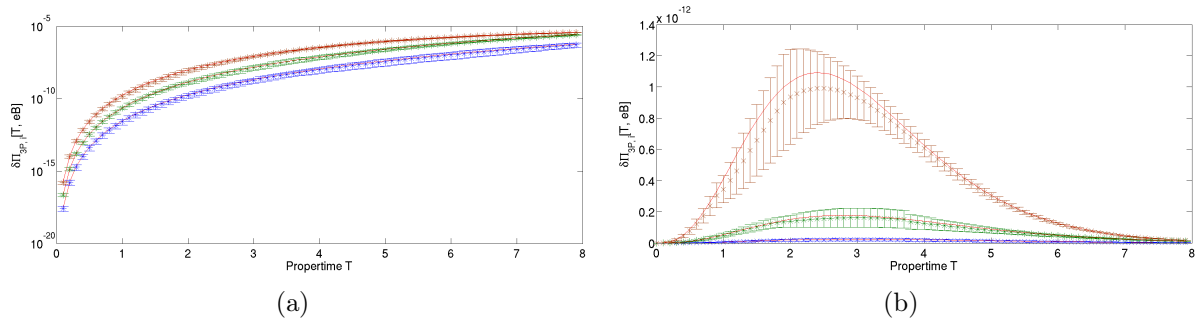


Abbildung 4.7.: Ergebnisse der Weltlinienrechnungen (pure worldline + small-T Fit) für verschiedene Feldstärken $eB = 0.1$ (blau), $eB = 0.2$ (grün) und $eB = 0.4$ (braun) im Vergleich zu den Rechnungen nach Adler und Schubert (rot) mit $\omega_1 = 0.01$ und einem Ensemble von 200000 Weltlinien. Dabei zeigt Abbildung 4.7(a) die Weltlinienresultate ohne den Vorfaktor und Abbildung 4.7(b) mit dem Faktor $e^{-m^2 T}/(4\pi T)^2$.

sembles ein Kompromis zwischen erforderlicher Rechenzeit und numerischer Genauigkeit gefunden werden. In unserem Fall ist dies mit der verwendeten Ensemblegröße von 200000 Weltlinien geschehen. Als weiteren physikalischen Parameter kann man auch den Impuls \vec{k}_i der einzelnen Photonen betrachten. Beim Photonsplitting wird ein einfallendes Photon \vec{k}_1 , das zunächst als on-shell betrachtet werden soll, in zwei austretende Photonen \vec{k}_2 und \vec{k}_3 , aufgrund des starken externen Feldes, geteilt. In welchem Verhältnis dabei die Teilung erfolgt, ist nicht explizit festgelegt. Es muss lediglich die Gleichung (4.1) erfüllt werden. In den vorangegangenen Rechnungen wurde immer von einem Teilungsverhältnis von 1:1 ausgegangen, das bedeutet der Impuls \vec{k}_1 wurde zu gleichen Teilen auf die beiden erzeugten Photonen aufgeteilt. Doch die Frage ist nun, inwieweit mit Hilfe des Weltlinienformalismus ein asymmetrisches Teilungsverhältnis betrachtet werden kann. Hierzu soll als Feldstärke $eB_0 = 0.4$ gewählt werden, weil bei dieser Feldstärke die besten Resultate bei der verwendeten Ensemblegröße im Bezug auf die erforderliche Rechenzeit erhalten werden. Außerdem ist der Impuls \vec{k}_1 mit $\vec{k}_1 = 0.01$ festgelegt worden, um den Einfluss der oszillierenden Anteile so gering wie möglich zu halten. In der Abbildung 4.8 sind die Ergebnisse für verschiedene Teilungsverhältnisse aufgetragen. Es ist dabei zu erkennen, dass die beste Approximation für ein symmetrisches Verhältnis erhalten wird (Abbildung 4.8(d)) und diese mit zunehmend asymmetrisch werdender Teilung sich verschlechtert. So kann zum Beispiel bei einem Verhältnis von 1:4, wie in Abbildung 4.8(a), nicht mehr von einer guten numerischen Approximation der analytischen Rechnungen gesprochen werden, da diese Lösung stark von den numerischen Werten abweicht und außerhalb des Fehlerbereiches liegt. Die Ursache dieses Verhaltens ist wiederum auf die oszillierenden Anteile in Gleichung (4.13) zurückzuführen, da mit zunehmender Asymmetrie in einem Teil der Gleichung eine Funktion $\exp(ikx)$ stark an Bedeutung gewinnt und somit ei-

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

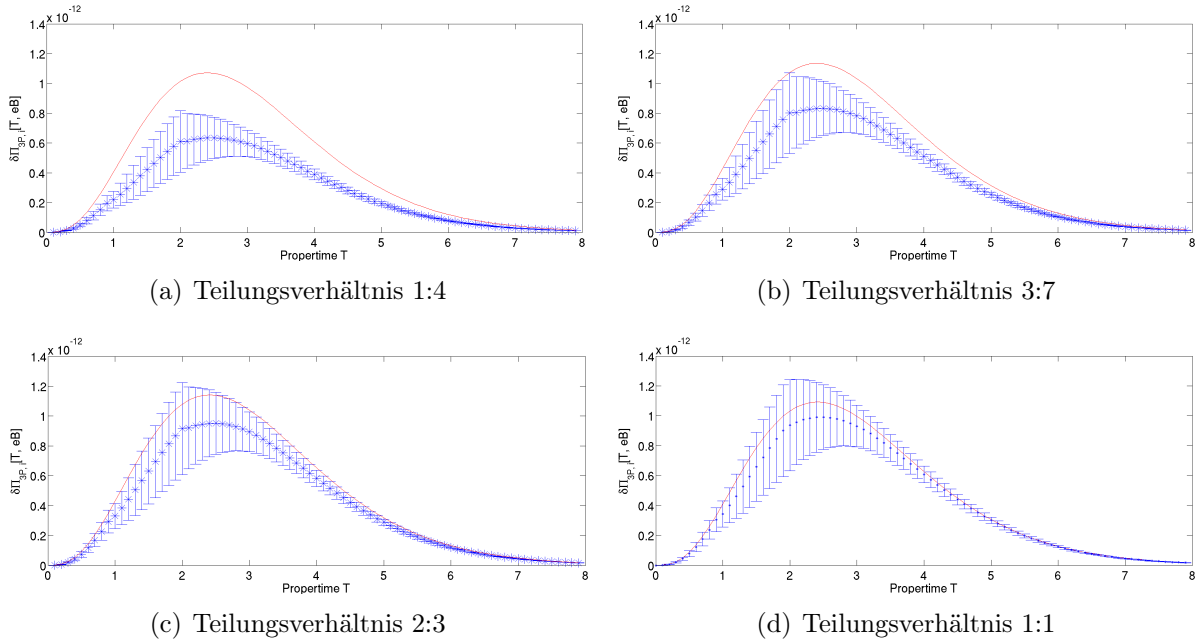


Abbildung 4.8.: Vergleich der numerischen Resultate für $\delta\Pi_{3P}$ (blau) mit der analytischen Rechnung nach Schubert und Adler (rot) für verschiedene Teilungsverhältnisse der austretenden Photonen. Als Ensemble wurden dabei 200000 Weltlinien verwendet.

ne größere Statistik erforderlich macht. Jedoch scheint, was die Lage der Abweichung betrifft, auch ein systematischer Fehler vorzuliegen, der durch die Vergrößerung der Statistik nicht behoben werden kann. Mögliche Ursachen können in einer zu geringen Zahl der Stützstellen pro Weltlinie liegen, oder in einen unzureichenden Überlapp zwischen den freien Ensemble und den Weltlinien die das asymmetrische Splittingmatrixelement dominieren. Schlussendlich zeigen die Resultate aus Abbildung 4.8, dass eine Betrachtung einer asymmetrischen Teilung der Impulse unter bestimmten Einschränkungen möglich ist. So sollte das Teilungsverhältnis nicht zu asymmetrisch gewählt werden, also eine Teilung von 2:3 in den untersuchten Parameterbereich nicht überschreiten.

4.2.3. 3-Punkt Korrelationsfunktion im räumlich inhomogenen Magnetfeld

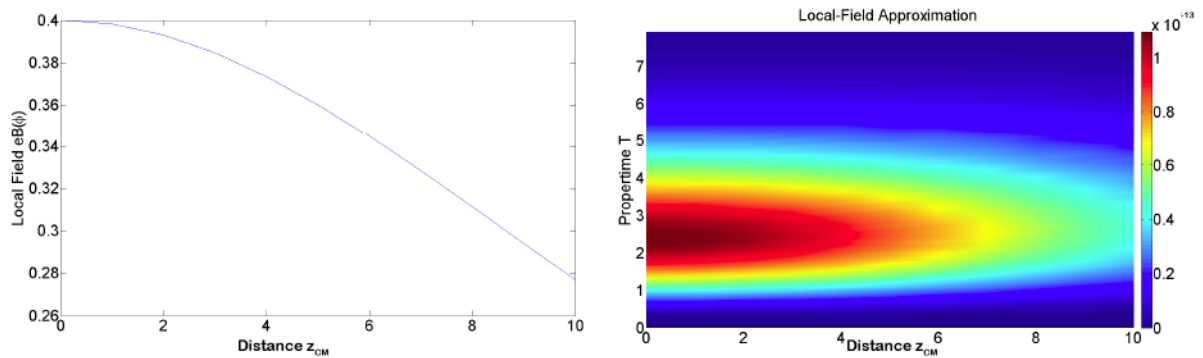
Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt werden konnte, dass es mit Hilfe der Weltliniennumerik möglich ist auch höherwertige Korrelationsfunktionen im konstanten Feld unter bestimmten Voraussetzungen zu berechnen, soll nun die 3-Punkt Korrelationsfunktion in einem räumlich inhomogenen Magnetfeld betrachtet werden. Auch in diesem Fall wollen wir uns auf die Berechnung der Funktion $\delta\Pi_{3P}$ beschränken, das heißt auf eine explizite numerische Auswertung des Eigenzeitintegrals soll verzichtet werden,

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

um die benötigte Rechenzeit zu minimieren. Weiter möchten wir die maximale Stärke des externen Feldes eB_0 mit $eB_0 = 0.4$ wählen. Als inhomogenes Feld soll analog zur 2-Punkt Funktion eine Lorentzfunktion der Art

$$eB(z) = \frac{eB_0}{1 + \frac{z^2}{\lambda_B^2}}$$

betrachtet werden. Die räumliche Inhomogenität liegt dabei in z - oder e_3 -Richtung und mit der Wellenlänge λ_B soll die Feldbreite (mittlere Breite der Inhomogenität) bezeichnet werden. In Abbildung 4.9 wurde zunächst der 3-Punkt Korrelator in der lokal-konstanten



(a) Abfall des lokalen Feldes in Abhängigkeit vom Abstand z_{CM} (b) Analytische Betrachtung von $\delta\Pi_{3P}$ in der lokalen Feldnäherung

Abbildung 4.9.: Analytische Betrachtungen von $\delta\Pi_{3P}$ nach der Schubert und Adler im Bereich der lokalen Feldnäherung mit einer Feldstärke von $eB = 0.4$ und bei einer Wellenlänge von $\lambda_B = 15.0$. Die Energie des einfallende Photons wurde mit $\omega_1 = 0.01$ gewählt bei symmetrischer Teilung.

Feldnäherung nach

$$eB(z_{CM}, \lambda_B) = \frac{eB_0}{1 + \frac{z_{CM}^2}{\lambda_B^2}} \quad (4.16)$$

betrachtet. Genauer ist darunter zu verstehen, dass in die analytische Gleichung (4.9) der sQED anstelle des Feldes eB_0 ein Feld $eB(z_{CM}, \lambda_B)$ (nachfolgend als eB bezeichnet) eingesetzt wird. Eine entsprechende Vorgehensweise wurde schon im Rahmen der 2-Punkt Funktion zur Bestimmung der Counterterme angewendet. Der Abstand z_{CM} ist dabei auf die Fixierung der Weltlinien über $z \rightarrow z + z_{CM}$ zurückzuführen. In den nachfolgenden Weltlinienrechnungen sind die reinen Weltlinienresultate unter Berücksichtigung der Entwicklung um kleine Eigenzeiten T (*pure worldline + small T fit*) dargestellt und sollen fortan als Weltlinienrechnung bezeichnet werden. Mit zunehmendem Abstand z_{CM} fällt die lokale Feldstärke bei konstanter Wellenlänge $\lambda_B = 15.0$ entsprechend der Abbildung 4.9(a) ab. Somit lässt sich für jedes Feld eB der Integrationskern des 3-Punkt

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Korrelators lokal-konstanten Näherung bestimmen, was in Abbildung 4.9(b) dargestellt ist. In der Abbildung 4.9(b) ist ein Maximum $\delta\Pi_{\max}$ bei $T \approx 2.5$ zu erkennen, welches

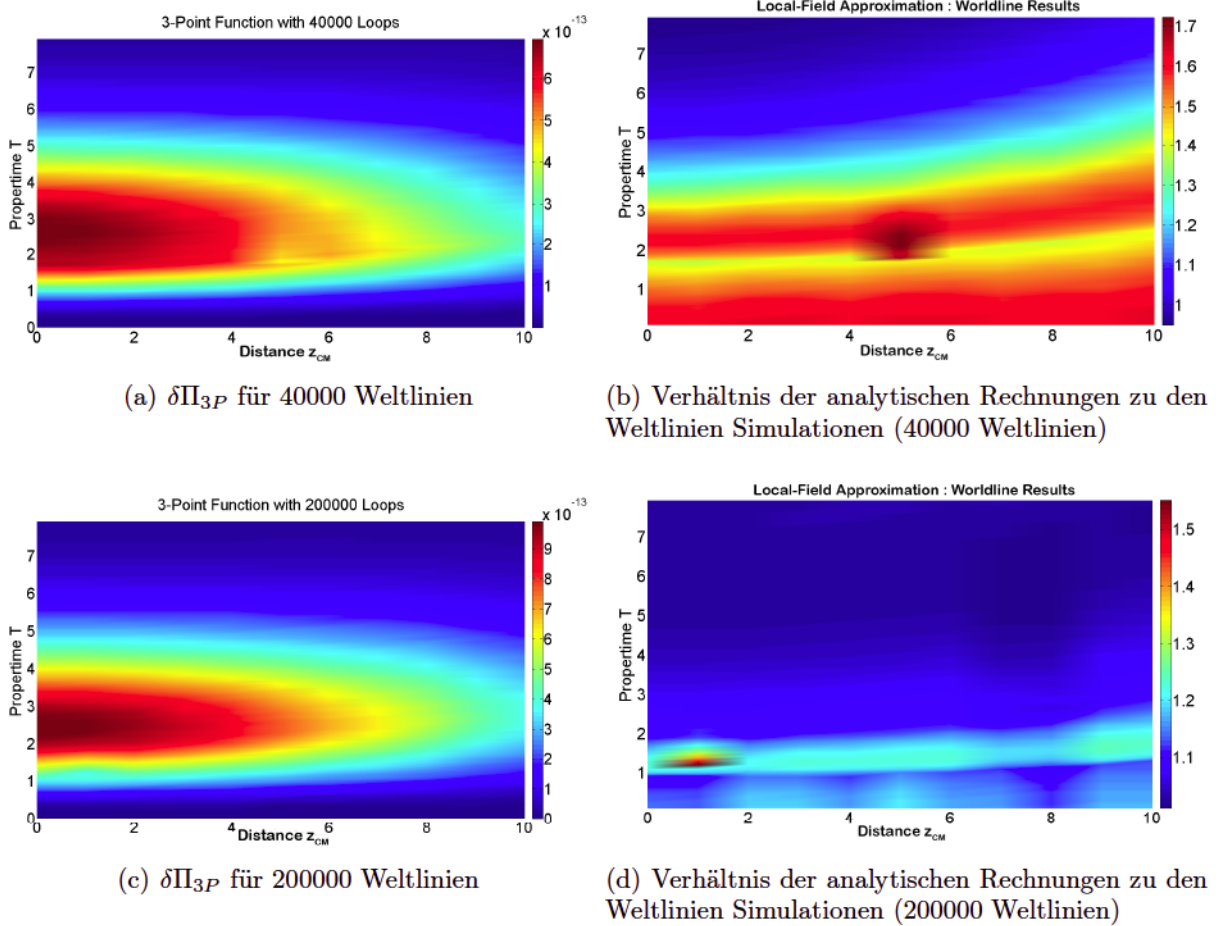


Abbildung 4.10.: Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einer Wellenlänge $\lambda_B = 15.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis von 1:1.

mit größer werdendem Abstand z_{CM} an Stärke abnimmt. Aufgrund der Tatsache, dass das Maximum in direktem Zusammenhang zu der Intensität des Feldes $eB(z)$ steht, war dieses Verhalten auch zu erwarten. Im Grenzfall $z_{CM} \rightarrow \infty$ sollte somit das Signal für die Funktion $\delta\Pi_{3P}$ gegen null konvergieren. Die numerische Rechnung für die 3-Punkt Korrelationsfunktion aus Abbildung 4.10 reproduziert diesen Funktionsverlauf weitestgehend, wobei die numerischen Resultate in etwa 10% (bei 200000 Weltlinien) unterhalb der Resultate aus der lokal-konstanten Feldnäherung liegen. Wie schon in den Vorbetrachtungen für das konstante Feld gezeigt worden ist, reicht ein Ensemble mit nur 40000 Weltlinien nicht dazu aus, die analytischen Ergebnisse zuverlässig zu reproduzieren. Ein Vergleich der Abbildungen 4.10(b) und 4.10(d) verdeutlicht dies noch einmal für den Fall eines räumlich inhomogenen Feldes, aufgrund der Tatsache, dass sich die Abweichung von der

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

lokal konstanten Näherung für ein Ensemble mit 40000 Weltlinien deutlich von dem Fall mit 200000 Weltlinien unterscheidet. Genauer lässt sich diese Tatsache über die Betrachtung der mittleren statistischen Streuung der numerischen Resultate zeigen. Wie schon im Fall der 2-Punkt Funktion, haben wir auch an dieser Stelle jeweils fünf verschiedene statistische Ensembles zur Durchführung der Simulation verwendet, deren Streuung sich aus der statistischen Standardabweichung ergibt. Im Fall von 200000 Weltlinien liegt diese im Mittel 40% unterhalb der der Streuung des Ensembles mit 40000 Weltlinien. Außerdem ist in Abbildung 4.10(d) zu erkennen, dass die maximale Abweichung nicht im Bereich des Maximums für $\delta\Pi_{3P}$, welches bei $T \approx 2.5$ liegt, zu finden ist, sondern deutlich unterhalb in einem Bereich um $T = 1.5$. Genauer ist die Abweichung der numerischen Ergebnisse in der Abbildung 4.11 zu erkennen, in der die numerischen Resultate für verschiedene Abstände z_{CM} aufgetragen wurden. Mit steigendem Abstand z_{CM} verschiebt sich die dynamische Grenze T_D zu entsprechend größeren Eigenzeiten. Die Ergebnisse der

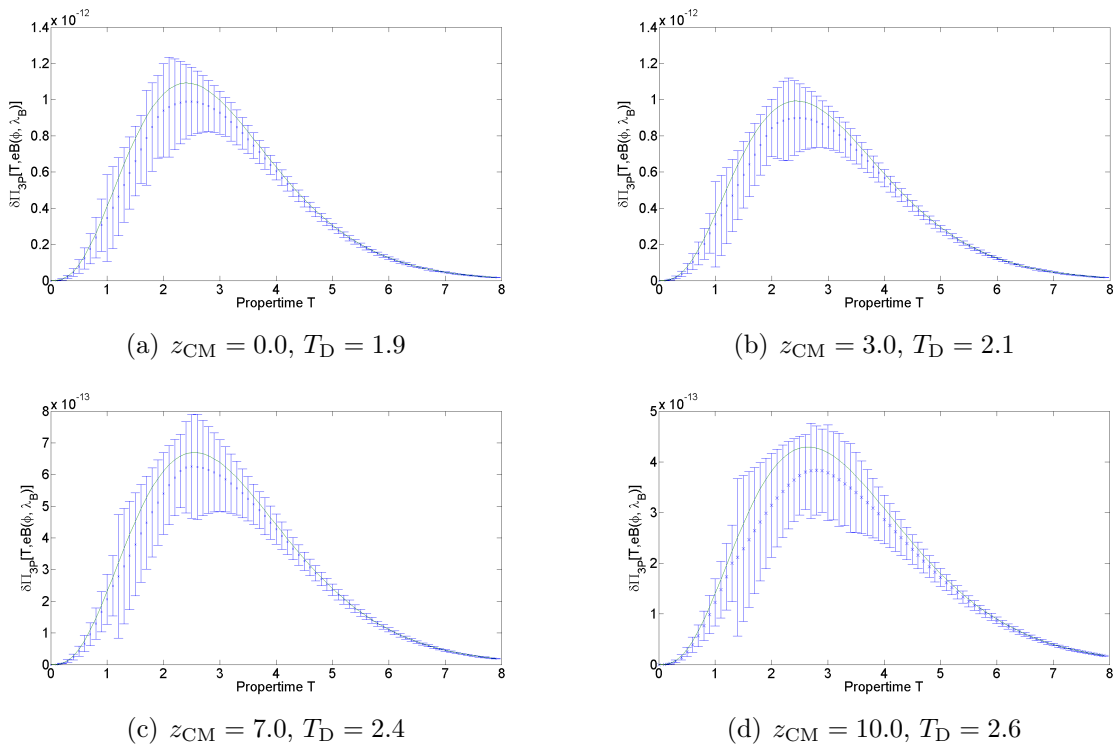
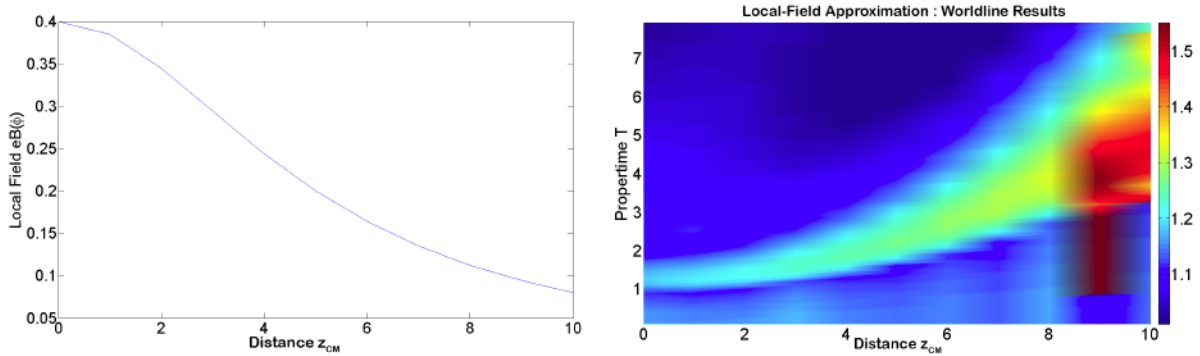


Abbildung 4.11.: Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ (blau) im Vergleich mit der analytischen Lösung (grün) für verschiedene Abstände z_{CM} mit 200000 Weltlinien. Die physikalischen Parameter sind identisch zu denen aus Abbildung 4.10(d).

Simulation liegen in den Abbildungen 4.11(a) bis 4.11(d) immer deutlich unterhalb der lokal-konstanten Feldnäherung, was auf einen systematischen Fehler schließen lässt. Jedoch ist aus den entsprechenden Abbildungen ebenfalls ersichtlich, dass die Abweichung innerhalb der statistischen Fehlergrenzen liegt. Durch eine entsprechende Vergrößerung

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

der Statistik kann im Weiteren die Abweichung genauer untersucht werden, weil in diesem Fall die entsprechenden Fehler verringert werden können. Jedoch zeigte schon der Übergang von 40000 Weltlinien auf 200000 Weltlinien das die damit erhaltene Verkleinerung des statistischen Fehlers nur minimal ist, weshalb eine weitere Vergrößerung der Statistik nicht sinnvoll zu sein scheint. Zu beachten ist immer wieder der Sachverhalt, dass die Wahl der Ensemblegröße durch die uns zur Verfügung stehenden Hardwareressourcen begrenzt ist. In den vorangegangenen Rechnungen wurde gezeigt, dass im konstanten Magnetfeld eine Wiedergabe der analytischen Resultate auf Niveau der 3-Punkt Korrelationsfunktion möglich ist. Die Motivation für die Untersuchung von räumlich inhomogenen Magnetfeldern liegt unter anderen in der Hoffnung begründet, etwaige Effekte aufgrund der räumlichen Inhomogenität zu finden. Aus diesem Grunde haben wir in den nachfolgenden Simulationen, Parameter wie die Feldbreite λ_B und den Abstand z_{CM} entsprechend variiert und jeweils das Verhältnis zwischen der lokal-konstanten Feldnäherung und den Weltlinienrechnungen betrachtet. Hierbei wird in der Abbildung 4.12(b) zunächst

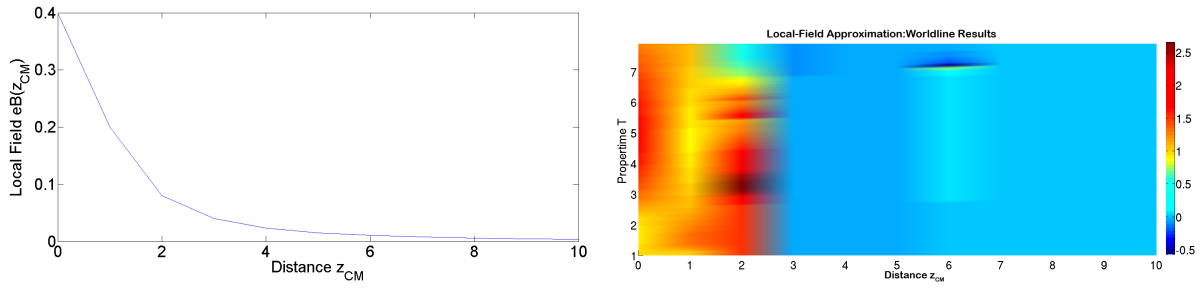


(a) Abfall des lokalen Feldes in Abhängigkeit vom Abstand z_{CM} . (b) Verhältnis der analytischen Rechnungen zu den Weltlinien Simulationen (200000 Weltlinien).

Abbildung 4.12.: Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einer Wellenlänge $\lambda_B = 5.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.

die Feldbreite λ_B auf $\lambda_B = 5.0$ im Vergleich zu Abbildung 4.10(d) verringert. Die Größe des verwendeten Weltlinienensembles ist mit 200000 Weltlinien konstant gehalten worden. Es ist dabei zunächst zu erkennen das die Feldstärke eB in der lokal-konstanten Näherung bei $\lambda_B = 5.0$ deutlich stärker abfällt (Abbildung 4.12(a)), jedoch das Verhältnis zwischen $\delta\Pi_{3P, \text{lokal}}$ zu $\delta\Pi_{3P}$ deutlich oberhalb von eins im gesamten Parameterbereich zu finden ist (Abbildung 4.12(b)). Somit liegen auch in diesem Bereich die Weltlinienrechnungen wie für $\lambda_B = 15.0$ unterhalb der lokal-konstanten Näherung. In Abbildung 4.13(b) wurde von uns der Parameterbereich noch einmal auf Skala der Comptonwellenlänge, das heißt bei $\lambda_B = 1.0$, untersucht. Es ist zu erkennen, dass in diesem Parameterbereich durchaus das

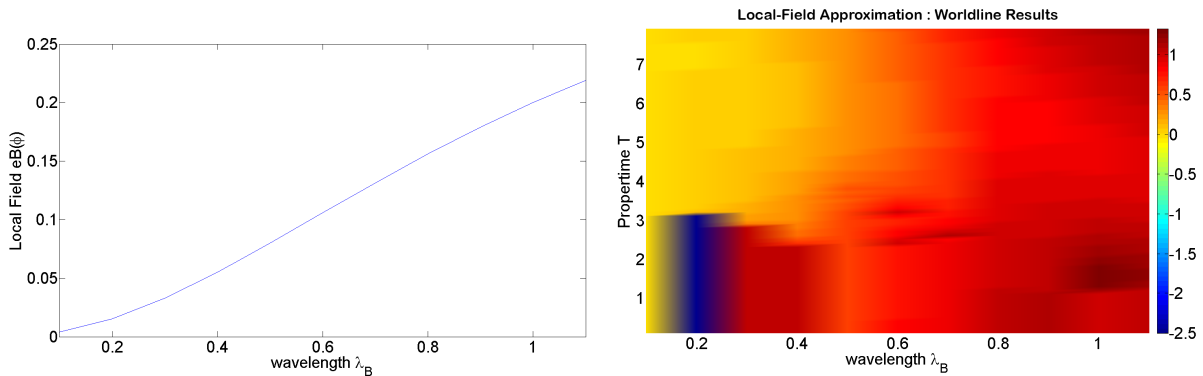
4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion



(a) Abfall des lokalen Feldes in Abhängigkeit vom Abstand z_{CM} . (b) Verhältnis der analytischen Rechnungen zu den Weltlinien Simulationen (200000 Weltlinien).

Abbildung 4.13.: Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einer Wellenlänge $\lambda_B = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis von 1:1.

Verhältnis zwischen lokal-konstanter Feldnäherung und den Weltlinienrechnungen unter den Wert von eins abfallen kann. Hierbei sollte der Bereich um den Wert $z_{CM} \approx 3.0$ etwas genauer untersucht werden, was in Abbildung 4.14(b) geschehen ist. Die Motivation dies durchzuführen, liegt zum einen an der Tatsache, dass in Abbildung 4.13(b) dieser Bereich nur schlecht aufgelöst ist. Zum anderen aber auch daran, dass die bisherigen Resultate vermuten lassen einen Effekt für $z_{CM} \approx 3.0$ zu finden. Bei größeren Abständen z_{CM} fällt das lokale Feld auf Werte gegen null ab (Abbildung 4.13(a)), weshalb in diesem Fall die Numerik gegen den feldfreien Fall konvergiert und somit der Einfluss des Wilsonloop durch das Rauschen des Anteils $\delta\Pi_{3P, vac}$ überdeckt wird. In Abbildung 4.14(b) ist der



(a) Abfall des lokalen Feldes in Abhängigkeit von λ_B . (b) Verhältnis der analytischen Rechnungen zu den Weltlinien Simulationen (200000 Weltlinien).

Abbildung 4.14.: Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einem Phasenterm $\phi = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.

Feldstärkebereich noch einmal für Feldbreiten unterhalb der Comptonwellenlänge darge-

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

stellt ($\lambda_B \leq 1$), wobei auch in diesem Fall bei einem Wert um $\lambda_B \approx 0.8$ das Verhältnis zwischen lokal-konstanter Feldnäherung und den Weltlinienrechnungen auf Werte unterhalb von eins abfällt. Ein Vergleich mit den statistischen Fehlern für $\lambda_B = 0.8$ zeigt, dass die Abweichung der Weltlinienrechnungen von der lokal-konstanten Näherung außerhalb des Fehlerbereiches liegt (gelb-markierter Bereich) und somit diese nicht mehr allein durch numerische Ungenauigkeit erklärbar ist. Es scheint in einem Bereich für Feldbreiten auf Niveau der Comptonwellenlänge durchaus zu einem physikalischen Effekt aufgrund der Feldinhomogenität zu kommen. Dieser tritt nach den Abbildungen 4.13(b) und 4.14(b) auf, wenn das lokal-konstante Feld auf einen lokalen Wert von $eB \approx 0.15$ abgefallen ist. Abbildung 4.15(b) zeigt außerdem, dass dieser Effekt mit steigender Feldbreite wieder verschwindet und die auftretenden Abweichungen wieder gegen die in den Abbildungen 4.11(a) bis 4.11(d) konvergieren. Für kleinere Wellenlängen ergibt sich das Problem, dass die Feldstärke eB zu gering ist um noch numerisch erfasst werden zu können. Im Rahmen

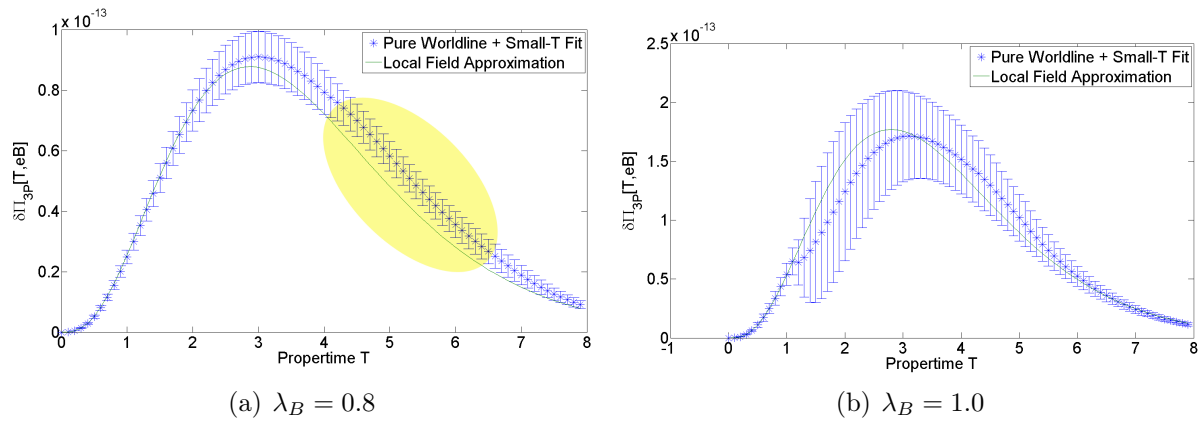


Abbildung 4.15.: Fehlerdarstellung der Weltlinienrechnungen aus Abbildung 4.14(b) bei einem Abstand $z_{\text{CM}} = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.

des statistischen Fehlers ist dieser Sachverhalt darin ersichtlich, dass die Fehlerbereiche den Verlauf der Kurve von $\delta\Pi_{3P}[T]$ überdecken. Um nun die Eigenzeitintegration abzuschätzen, konnten wir mit Hilfe des Analyseprogramms *Origin* mit den vorhandenen Daten den Flächeninhalt interpolieren. Dabei erhalten wir für die Resultate aus Abbildung 4.15(a) für $\Pi_{3P,\text{lokal}} = 3.53 \cdot 10^{-13}$ und $\Pi_{3P} = (3.85 \pm 0.31) \cdot 10^{-13}$, womit die Weltlinienrechnung in etwa 9% größer als die lokal-konstante Näherung ist. Allerdings liegt der Fehler des Gesamtensembles in der gleichen Größenordnung. Bei den Resultaten aus der Abbildung 4.15(b) beträgt die Abweichung zwischen den beiden Kurven hingegen nur noch 1.6%, wobei die lokale Feldnäherung mit $\Pi_{3P,\text{lokal}} = 6.88 \cdot 10^{-13}$ das größere Ergebnis liefert. Dabei lässt sich aber aus der reinen Abweichung zwischen den beiden Werten noch keine Schlussfolgerung auf einen wirklichen Effekt ziehen, da in diesem Fall die numerischen

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

Fehler berücksichtigt werden müssen. Die Interpolation der Flächen unterhalb der Kurven für $\delta\Pi_{3P}$ zeigt aber, in welcher Größenordnung die Resultate für die 3-Punkt Funktion nach Ausführung der Eigenzeitintegration liegen. Außerdem lässt es eine Einschätzung der Größenordnung eines etwaigen Effektes zu, der in Abbildung 4.15(a) beobachtet worden ist. Wie schon im Fall der 2-Punkt Funktion, wo auf Skala der Comptonwellenlänge ein defokussierender Effekt [56] aufgrund der Feldinhomogenität festgestellt worden ist, kommt es auch im Fall der 3-Punkt Funktion im Bereich dieser Wellenlänge zu einem Einfluss der Inhomogenität. In den bisherigen Beispielen ist der erwartete Einfluss des Boxdiagramms stark unterdrückt und deutlich geringer als von uns, nach einer am Ende dieses Abschnitts gezeigten analytischen Abschätzung, erwartet worden ist, weshalb in einer weiteren Berechnung die Einfallsrichtung des Photons im Bezug zur Richtung der Feldinhomogenität verändert werden soll. In den ersten Simulationen wurde die Propagationsrichtung des einfallenden Photons \vec{k}_1 so gewählt, dass sich dieses in Richtung der Feldinhomogenität bewegt. Nun soll untersucht werden, wie sich die ganze Betrachtung im Fall einer senkrecht zur Inhomogenität einfallenden Photons verhält. Hierzu wurde der Vektor $k_1 = (0, 0.01, 0, 0.01)$ gewählt und die anderen Parameter analog zu den Abbildungen 4.13(b) und 4.14(b). Das Resultat dieser Simulation ist in Abbildung 4.16 dargestellt. Dabei wurde die Simulation wiederum für eine konstant gehaltene Feldbreite $\lambda_B = 1.0$

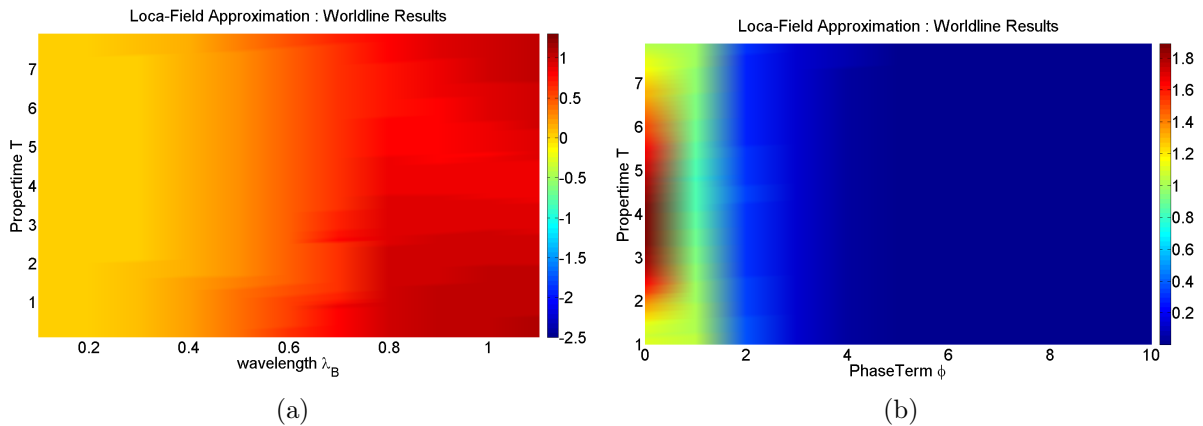


Abbildung 4.16.: Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einem Phasenterm $\phi = 1.0$ (Abbildung 4.16(a)), sowie einer Wellenlänge $\lambda_B = 1.0$ (Abbildung 4.16(b)) und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0.01, 0, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.

(4.16(b)) und für eine konstante Phase $\phi = \frac{z_{CM}}{\lambda_B} = 1.0$ (4.16(a)) durchgeführt, um die Funktion $\delta\Pi_{3P}$ bei möglichst vielen lokal-konstanten Feldstärken zu betrachten. Dabei ist der interessante Bereich wiederum dort zu finden, wo das Verhältnis zwischen der lokal-konstanten Näherung und der eigentlichen Weltlinienrechnung kleiner als eins ist. Hierzu ist in Abbildung 4.16(a) zu erkennen, dass ein solches Verhältnis wiederum klar bei Wel-

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

längen unterhalb der Comptonwellenlänge zu finden ist. Eine genauere Darstellung ist

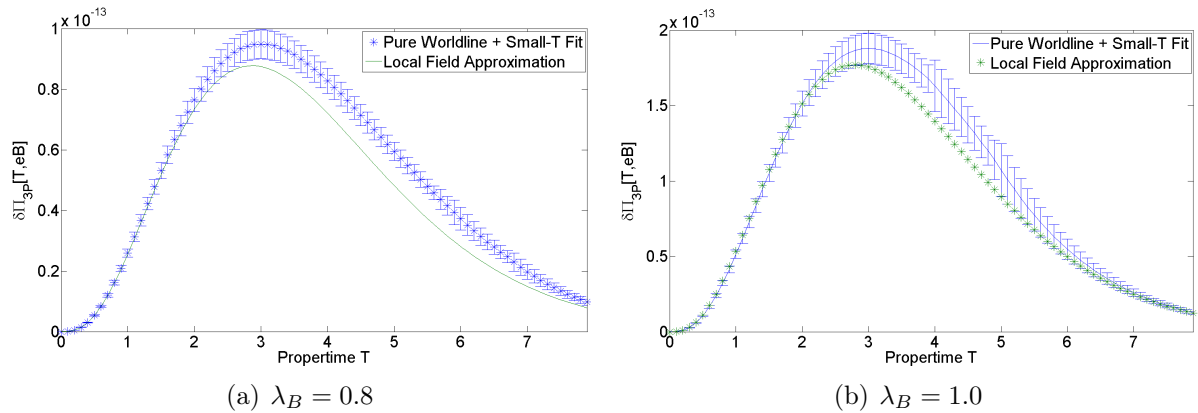


Abbildung 4.17.: Eigenzeitintegrand der Weltlinienrechnungen, von Abbildung 4.16(a), bei einem Abstand $z_{\text{CM}} = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0.01, 0, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.

in Abbildung 4.17 gewählt worden, wo die Weltlinienrechnungen in Kombination mit der Korrektur für kleine Eigenzeiten (blau) direkt im Vergleich zu den lokal-konstanten Näherungsrechnungen (grün) dargestellt sind. Im Gegensatz zu Abbildung 4.15 liegen bei einem einfallenden Photon $k = (0, 0.1, 0, 0.1)$ die numerischen Werte auch bei einer Wellenlänge von $\lambda_B = 1.0$ noch klar oberhalb der Näherungsrechnung, was darauf schließen lässt, dass im Fall einer solchen Konfiguration, der Einfluss des Boxdiagramms nicht so stark unterdrückt ist. Wichtig dabei ist immer die Tatsache, dass die Abweichung außerhalb der statistischen Fehler liegt, und somit ein physikalischer Effekt sichtbar wird. Zumal der Einfluss der Statistik, wie auch schon im Fall der 2-Punkt Funktion, durch eine Variation des Initialisierungswertes genauer untersucht werden konnte. Eine Integration der Resultate aus der Abbildung 4.17(a) führt auf $\Pi_{3P, \text{lokal}} = 3.53 \cdot 10^{-13}$ mit $\Pi_{3P} = (4.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-13}$ und Abbildung 4.17(b) auf $\Pi_{3P, \text{lokal}} = 6.88 \cdot 10^{-13}$ mit $\Pi_{3P} = (7.46 \pm 0.56) \cdot 10^{-13}$. Dabei ist die Abweichung der numerischen Ergebnisse von der lokal-konstanten Näherung deutlich größer als im zuvor betrachteten Fall und beträgt in Abbildung 4.17(a) 13% und in 4.17(b) bei einer Wellenlänge von $\lambda_B = 1.0$ noch 8%. Der statistische Fehler beträgt bei $\lambda_B = 0.8$ 5% und bei $\lambda_B = 1.0$ 8%, womit diese Abweichung entweder jenseits beziehungsweise im Bereich des Fehlers zu finden ist. Zusammenfassend kann aufgrund der ersten Weltlinienrechnung im räumlich inhomogenen Feld darauf geschlossen werden, dass es auf Skala der Comptonwellenlänge λ_C auch auf Niveau der 3-Punkt Funktion zu einem Einfluss der Inhomogenität kommt. In wie weit es sich dabei aber um einen reinen Einfluss des Boxdiagramm handelt, kann auf diese Weise nicht geklärt werden, da auch andere physikalische Effekte oder höherwertige Korrelationsfunktionen zu der Abweichung beitragen können. In einer Schwachfeldnäherung und unter der Annahme $\lambda_B m \gg 1$ bestimmt sich zunächst

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

nach Adler das Matrixelement $\mathcal{M}[(||) \rightarrow (\perp)_1 + (\perp)_2]$ im konstanten Magnetfeld für die QED über die Gleichung:

$$\left. \frac{\mathcal{M}[\dots]}{m} \right|_{\text{const}} = \frac{4e^3}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{eB}{m^2} \right)^3 \sin^3 \theta \left(\frac{\omega_1^3}{m^3} \right) C_2. \quad (4.17)$$

Auf Niveau der Hexagonordnung lässt sich für die Konstante $C_{2,\text{Hexagon}} = C_2 = 6 \cdot \frac{13}{945}$ im Fall $eB \rightarrow 0$ schreiben, wobei θ den Winkel zwischen der Propagationsrichtung des einfallenden Photons und der Richtung des externen Feldes (In den Weltlinienrechnungen gilt $\theta = \frac{\pi}{2}$) beschreibt. Unter der Annahme, dass $eB_0 = 0.4$ und $m^2 = 1.0$ sind, wie es in den entsprechenden Weltlinienrechnungen von uns verwendet worden ist, ergibt sich aus Gleichung (4.17):

$$\left. \frac{\mathcal{M}[\dots]}{m} \right|_{\text{const}} = 7.6 \cdot 10^{-10} \cdot e^3.$$

Darin wurde für die Frequenzen $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.01$, bei einen symmetrischen Teilungsverhältnis, sowie $z_{\text{CM}} = 1.0$ und $\lambda_B = 0.8$ angewendet. Unter Berücksichtigung eines inhomogenen Feldes lässt sich für die numerischen Resultate die Annahme:

$$\left. \frac{\mathcal{M}[\dots]}{m} \right|_{\text{Numerik}} = \left. \frac{\mathcal{M}[\dots]}{m} \right|_{\text{const}} + \Delta$$

abschätzen, in der Δ die Korrekturen enthält, die durch den Einfluss der Inhomogenität entstehen. Diese Korrekturen lassen sich ausgehend von Gleichung (4.17) auch abschätzen als:

$$\Delta = \frac{4e^3}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{eB}{m^2} \right) \sin \theta \left(\frac{\omega_1^3}{m^3} \right) \left(\frac{1}{m\lambda_B} \right)^2 \cdot C. \quad (4.18)$$

Um die Bedingung zu erfüllen, dass im konstanten Feld $\Delta = 0$ gilt, wurde der Faktor $\left(\frac{1}{m\lambda_B} \right)^2$ eingeführt, der im Sinne einer Ableitungsentwicklung erwartbar ist. Innerhalb der numerischen Simulation wird das Matrixelement $\mathcal{M}[\dots]$ mit $\mathcal{M}[\dots] \sim \Pi_{3P}$ für räumlich inhomogene Felder bestimmt. Eine Abschätzung der Numerik lässt sich unter der Annahme $C \approx C_{2,\text{Hexagon}}$ realisieren, was auf

$$\Delta / \left. \frac{\mathcal{M}[\dots]}{m} \right|_{\text{const}} = \left(\frac{m^2}{eB} \right)^2 \left(\frac{1}{m\lambda_B} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \approx 61$$

4. Die 3-Punkt Korrelationsfunktion

führt. Die Numerik im Rahmen der sQED führt hingegen bei $\lambda_B = 0.8$ auf ein Verhältnis von:

$$\frac{\Delta}{\Pi_{3P,\text{lokal}}} = \frac{\Pi_{3P} - \Pi_{3P,\text{lokal}}}{\Pi_{3P,\text{lokal}}} = 0,13.$$

Dieses ist somit deutlich kleiner als die analytischen Abschätzung. Die Ursache kann die Verwendung der heat-kernel Entwicklung für kleine Eigenzeiten T zur Stabilisierung der Numerik sein. Dabei werden die entsprechenden analytischen Korrekturterme in einer lokal konstanten Näherung bestimmt und von der Numerik anschließend entsprechend gut wiedergegeben. Die daraus resultierende Bestimmung des Umschaltpunktes T_D kann eventuell einen Anhaltspunkt für die vorhandene Abweichung von der analytischen Abschätzung liefern.

5. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung von Quanteneffekten in räumlich inhomogenen Feldern mit Hilfe des Weltlinienformalismus im Rahmen der skalaren Quantenelektrodynamik (sQED), mit Hilfe numerischer Monte-Carlo Methoden. In einem ersten Schritt musste hierzu von uns gezeigt werden, dass es überhaupt möglich ist mit Hilfe eines numerischen Algorithmus die gewünschten Photon-Korrelationsfunktionen zu berechnen. Weil in diesem Zusammenhang die rein analytische Lösung der entsprechenden Gleichungen in allgemeinen räumlich inhomogenen Feldern ein bis heute noch ungelöstes Problem darstellt, dient es als Test die bekannten analytischen Resultate für konstante Felder zu reproduzieren. Es zeigt sich für die 2-Punkt Korrelationsfunktion (Polarisationstensor), dass in einem weiten Parameterbereich wie Impuls \vec{k} , Energie ω und Feldstärke eB , der numerische Algorithmus eine gute Approximation der analytischen Ergebnisse liefert. In diesem Zusammenhang konnten wir auch die Grenzen der Simulation untersuchen. So müssen die einzelnen Photonenvektoren k als Minkowskiwertige Größe in den Algorithmus gegeben werden, um die analytischen Rechnungen zu reproduzieren, was eine erheblich höhere Statistik erforderlich macht als für den Teil der effektiven Wirkung. Als erstes wurde danach eine oszillierende räumliche Inhomogenität auf Niveau der 2-Punkt Korrelationsfunktion untersucht. Als physikalische Observable bot sich in diesen Zusammenhang die Betrachtung der Phasengeschwindigkeit v_{ph} an. Dabei konnten wir auf Skala der Comptonwellenlänge λ_C , genauer bei einer Skala der Feldinhomogenität von $\lambda_B = 0.65 \lambda_C$, eine neuartige defokussierende Eigenschaft des Quantenvakuums feststellen. Genauer bedeutet dies, dass Photonen von Starkfeldregionen in diesem Wellenlängenbereich weg gebeugt werden. Für langsam veränderliche Felder ist der gegenteilige Effekt bekannt, denn Starkfeldregionen haben für diesen Fall fokussierende Eigenschaften. Im Bereich $\lambda_B \gg \lambda_C$ zeigen die Ergebnisse der Weltliniensimulation, dass das Quantenvakuum auch mit einer lokal-konstanten Näherung des Feldes betrachtet werden kann. Ein weiterer interessanter Effekt auf Niveau der 2-Punkt Korrelationsfunktion ist die Quantenreflexion. In diesem Zusammenhang untersuchten wir ein Lorentzförmiges Feldprofil, an welchem ein einfallendes Photon reflektiert werden soll. Erste analytische Untersuchungen wurden dabei in einer lokal-konstanten Näherung vorgenommen und konnten im Fall eines parallel polarisierten Photons von dem numerischen Algorithmus bestätigt werden. Die in der Literatur vorgeschlagene Abschätzung für die Quantenreflexion mit Hilfe der lokal-

5. Zusammenfassung

konstanten Feldnäherung konnte somit zum ersten Mal mit einer vollen Rechnung, die Feldinhomogenitäten auf Quantenniveau berücksichtigt, qualitativ bestätigt werden. Auf Level der 2-Punkt Korrelationsfunktion war es uns somit möglich erste Untersuchungen zu räumlich inhomogenen Feldern auf Basis der sQED durchzuführen und einige interessante Effekte auf Skala der Comptonwellenlänge festzustellen. Im Weiteren war es das Ziel den numerischen Algorithmus auch auf höherwertige Korrelationsfunktionen anzuwenden. In diesem Zusammenhang bot die 3-Punkt Korrelationsfunktion einen ersten Zugang, weil auf diesem Niveau auch analytische Betrachtungen im konstanten Magnetfeld vorliegen. Es hat sich gezeigt, dass die Resultate im konstanten Magnetfeld auch von dem numerischen Algorithmus reproduziert werden können, jedoch musste hierzu die Statistik deutlich erhöht werden, um den zusätzlichen oszillierenden Charakter bei höherwertigen Korrelationsfunktionen auszugleichen. Auch muss die Feldstärke des externen Magnetfeldes deutlich erhöht werden, um ein akzeptables Signal-zu-Rauschverhältnis zu erreichen. Das Ziel auf Niveau der 3-Punkt Korrelationsfunktion und dem damit verbundenen Effekt des Photonsplittings war es zu untersuchen, ob die Feldinhomogenitäten auch in diesem Fall eine qualitativ entscheidende Rolle spielen können. Das ließ sich zunächst vermuten da im Fall konstanter Felder das Adler-Theorem das Verschwinden des Beitrags führender Ordnung zum Photonsplitting (Boxdiagramm) zur Folge hat. Die Weltlinienrechnungen haben jedoch überraschenderweise gezeigt, dass die Abweichung zum konstanten-Feld Fall im Bereich von Inhomogenitäten auf Skala der Comptonwellenlänge klein ist. Signifikante Effekte der Inhomogenität selbst treten auch in diesem Fall erst bei Feldbreiten der lorentzförmigen Inhomogenität von $\lambda_B \leq \lambda_C$ auf. Außerdem scheint es eine Abhängigkeit von der verwendeten Geometrie, das bedeutet auf welche Weise das Photon im Verhältnis zur Richtung der Inhomogenität propagiert, zu geben. Diese Resultate sind insofern interessant, weil sie verdeutlichen, dass die Näherung lokal konstanter Felder selbst an ihrer naiven Gültigkeitsgrenze und sogar darüber hinaus unerwarteterweise Bestand haben kann.

Alle bisherigen Untersuchungen basieren auf der Theorie einer skalaren QED und vernachlässigen somit vollständig den Spin. In zukünftigen Simulationen sollten die Algorithmen auf die vollständige QED erweitert werden, um einen etwaigen Spineinfluss zu berücksichtigen. Außerdem sollten die Effekte für höherwertige Korrelationsfunktionen weiter untersucht werden, um das Verhalten in einem breiteren Parameterbereich besser verstehen zu können.

Literaturverzeichnis

- 1 W. Heisenberg and H. Euler. Consequences of Dirac's theory of positrons. *Z.Phys.*, 98:714–732, 1936. 1, 3, 4, D
- 2 Fritz Sauter. Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. *Z.Phys.*, 69:742–764, 1931. 1, 1
- 3 Julian S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys.Rev.*, 82:664–679, 1951. 1, 3, 3.2.2, D
- 4 James J. Klein and B.P. Nigam. Dichroism of the Vacuum. *Phys.Rev.*, 136:B1540–B1542, 1964. 1, 3, D
- 5 R. Baier and P. Breitenlohner. The Vacuum refraction Index in the presence of External Fields. *Nuovo Cim.*, B47:117–120, 1967. 1, 3, D
- 6 Iwo Bialynicki-Birula and Zofia Bialynicka-Birula. Quantum Electrodynamics of Intense Photon Beams. New Approximation Method. *Phys.Rev.*, A14:1101–1108, 1976. 1, D
- 7 J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff. On Massive neutron cores. *Phys.Rev.*, 55:374–381, 1939. 1, 4
- 8 John Sampson Toll. The Dispersion relation for light and its application to problems involving electron pairs. *Ph. D. Thesis (unpublished)*, 1952. 1
- 9 J.K. Daugherty and A.K. Harding. Pair production in superstrong magnetic fields. *Astrophys.J.*, 273:761–773, 1983. 1
- 10 Sang Pyo Kim and Don N. Page. Schwinger pair production via instantons in a strong electric field. *Phys.Rev.*, D65:105002, 2002. 1
- 11 A.I. Nikishov. Barrier scattering in field theory removal of klein paradox. *Nucl.Phys.*, B21:346–358, 1970. 1
- 12 Daniel Cangemi, Eric D'Hoker, and Gerald V. Dunne. Effective energy for QED in (2+1)-dimensions with semilocalized magnetic fields: A Solvable model. *Phys.Rev.*, D52:3163–3167, 1995. 1

- 13 Wu-yang Tsai and Thomas Erber. Photon Pair Creation in Intense Magnetic Fields. *Phys.Rev.*, D10:492, 1974. 1
- 14 I.A. Batalin and A.E. Shabad. Photon green function in a stationary homogeneous field of the most general form. *Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, 60:894–900, 1971. 1, 3
- 15 V.I. Ritus. Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties. *Annals Phys.*, 69:555–582, 1972. 1
- 16 R.A. Cover and G. Kalman. Longitudinal, massive photon in an external magnetic field. *Phys.Rev.Lett.*, 33:1113–1116, 1974. 1
- 17 L.F. Urrutia. Vacuum Polarization in Parallel Homogeneous Electric and Magnetic Fields. *Phys.Rev.*, D17:1977, 1978. 1
- 18 G.K. Artimovich. Properties of the photon polarization operator in an electric field: Effective charge of the electron in an external field. *Sov.Phys.JETP*, 70:787–794, 1990. 1
- 19 W. Dittrich and R. Shaisultanov. Vacuum polarization in QED with worldline methods. *Phys.Rev.*, D62:045024, 2000. 1, 3.2.1
- 20 Sushan Konar. Photon propagation in a magnetized medium. *Int.J.Mod.Phys.*, A17:1055–1058, 2002. 1
- 21 Selym Villalba-Chavez. The Role of photon polarization modes in the magnetization and instability of the vacuum in a supercritical field. *Phys.Lett.*, B692:317–322, 2010. 1
- 22 S. Villalba-Chavez and C. Muller. Photo-production of scalar particles in the field of a circularly polarized laser beam. *Phys.Lett.*, B718:992–997, 2013. 1
- 23 Felix Karbstein. The photon polarization tensor in a homogeneous magnetic or electric field. *Phys.Rev.*, D88:085033, 2013. 1
- 24 Martin J. A. Jansen and Carsten Müller. Strongly enhanced pair production in combined high- and low-frequency laser fields. 2013. 1
- 25 C. Muller, A. Di Piazza, A. Shahbaz, T. Burvenich, J. Evers, et al. High-energy, nuclear, and QED processes in strong laser fields. *Laser Phys.*, 18:175–184, 2008. 1
- 26 Wu-yang Tsai and Thomas Erber. The Propagation of Photons in Homogeneous Magnetic Fields: Index of Refraction. *Phys.Rev.*, D12:1132, 1975. 1, 3.4
- 27 Walter Dittrich and Holger Gies. Applications of the light cone condition for various perturbed vacua. 1998. 1

- 28** Stephen L. Adler. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. *Annals Phys.*, 67:599–647, 1971. 1, 4, 4, 4.1
- 29** Babette Dobrich and Holger Gies. High-Intensity Probes of Axion-Like Particles. pages 41–44, 2010. 1
- 30** Holger Gies, Joerg Jaeckel, and Andreas Ringwald. Polarized Light Propagating in a Magnetic Field as a Probe of Millicharged Fermions. *Phys.Rev.Lett.*, 97:140402, 2006. 1, D
- 31** M. Ahlers, H. Gies, J. Jaeckel, J. Redondo, and A. Ringwald. Laser experiments explore the hidden sector. *Phys.Rev.*, D77:095001, 2008. 1, D
- 32** Markus Ahlers, Holger Gies, Joerg Jaeckel, and Andreas Ringwald. On the Particle Interpretation of the PVLAS Data: Neutral versus Charged Particles. *Phys.Rev.*, D75:035011, 2007. 1, 3.4, 3.4, D
- 33** S. Villalba-Chávez and C. Müller. Searching for minicharged particles via birefringence, dichroism and Raman spectroscopy of the vacuum polarized by a high-intensity laser wave. *Annals Phys.*, 339:460–483, 2013. 1
- 34** Holger Gies. Strong laser fields as a probe for fundamental physics. *Eur.Phys.J.*, D55:311–317, 2009. 1
- 35** Thomas Heinzl, Anton Ilderton, and Mattias Marklund. Laser intensity effects in noncommutative QED. *Phys.Rev.*, D81:051902, 2010. 1
- 36** Zvi Bern and David A. Kosower. A New Approach to One Loop Calculations in Gauge Theories. *Phys.Rev.*, D38:1888, 1988. 1, 2
- 37** Zvi Bern and David A. Kosower. The Computation of loop amplitudes in gauge theories. *Nucl.Phys.*, B379:451–561, 1992. 1, 2, 3.2.2
- 38** Matthew J. Strassler. Field theory without Feynman diagrams: One loop effective actions. *Nucl.Phys.*, B385:145–184, 1992. 1, 2, 3.2.1, 4.1, C
- 39** Michael G. Schmidt and Christian Schubert. On the calculation of effective actions by string methods. *Phys.Lett.*, B318:438–446, 1993. 1
- 40** Denny Fliegner, Michael G. Schmidt, and Christian Schubert. The Higher derivative expansion of the effective action by the string inspired method. Part 1. *Z.Phys.*, C64:111–116, 1994. 1
- 41** Michael G. Schmidt and Christian Schubert. The Worldline path integral approach to Feynman graphs. 1994. 1

- 42 D. Fliegner, M.G. Schmidt, and C. Schubert. Three applications of the string inspired technique to quantum electrodynamics. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 51C:174–182, 1996. 1
- 43 Michael G. Schmidt and Christian Schubert. Worldline path integrals as a calculational tool in quantum field theory. pages 339–343, 1998. 1
- 44 Christian Schubert. The Worldline path integral approach to the Bern-Kosower formalism. 1997. 1, 3.2.1
- 45 Christian Schubert. Vacuum polarization tensors in constant electromagnetic fields. Part 1. *Nucl.Phys.*, B585:407–428, 2000. 1, 3.2.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.2, 4.1, C
- 46 Christian Schubert. Perturbative quantum field theory in the string inspired formalism. *Phys.Rept.*, 355:73–234, 2001. 1, C
- 47 Stephen L. Adler and Christian Schubert. Photon splitting in a strong magnetic field: Recalculation and comparison with previous calculations. *Phys.Rev.Lett.*, 77:1695–1698, 1996. 1, 4.1, 4.1
- 48 Holger Gies, Kurt Langfeld, and Laurent Moyaerts. Casimir effect on the worldline. *JHEP*, 0306:018, 2003. 1, 3.3
- 49 Holger Gies. Probing the quantum vacuum. Perturbative effective action approach in QED and QCD and its applications. 1999. 1, 3.4, 4.2
- 50 H. Gies, J. Sanchez-Guillen, and R.A. Vazquez. Quantum effective actions from non-perturbative worldline dynamics. *JHEP*, 0508:067, 2005. 1, 3.3, E.1
- 51 Kurt Langfeld, Laurent Moyaerts, and Holger Gies. Fermion induced quantum action of vortex systems. *Nucl.Phys.*, B646:158–180, 2002. 1, 3.3
- 52 Holger Gies and Kurt Langfeld. Quantum diffusion of magnetic fields in a numerical worldline approach. *Nucl.Phys.*, B613:353–365, 2001. 1, 3.2.3, 3.3
- 53 Holger Gies and Kurt Langfeld. Loops and loop clouds: A Numerical approach to the worldline formalism in QED. *Int.J.Mod.Phys.*, A17:966–978, 2002. 1
- 54 Holger Gies and Klaus Klingmuller. Pair production in inhomogeneous fields. *Phys.Rev.*, D72:065001, 2005. 1, 3.3
- 55 W. Dittrich and H. Gies. Probing the quantum vacuum. Perturbative effective action approach in quantum electrodynamics and its application. *Springer Tracts Mod.Phys.*, 166:1–241, 2000. 1, 3.4
- 56 Holger Gies and Lars Roessler. Vacuum polarization tensor in inhomogeneous magnetic fields. *Phys.Rev.*, D84:065035, 2011. 1, 3.2.1, 3.2.3, 3.3, 3.3.2, 4.2.3

- 57** Holger Gies, Felix Karbstein, and Nico Seegert. Quantum Reflection as a New Signature of Quantum Vacuum Nonlinearity. *New J.Phys.*, 15:083002, 2013. 1, 3.5, 3.5.1, 3.5.2
- 58** E. Zavattini et al. Experimental observation of optical rotation generated in vacuum by a magnetic field. *Phys.Rev.Lett.*, 96:110406, 2006. 1, D.1
- 59** Guido Zavattini, Ugo Gastaldi, Ruggero Pengo, Giuseppe Ruoso, Federico Della Valle, et al. Measuring the magnetic birefringence of vacuum: the PVLAS experiment. *Int.J.Mod.Phys.*, A27:1260017, 2012. 1, 5, D.1, D.1
- 60** Sheng-Jui Chen, Hsien-Hao Mei, and Wei-Tou Ni. Q and A experiment to search for vacuum dichroism, pseudoscalar-photon interaction and millicharged fermions. *Mod.Phys.Lett.*, A22:2815–2831, 2007. 1, D
- 61** Cecile Robilliard, Remy Battesti, Mathilde Fouche, Julien Mauchain, Anne-Marie Sautivet, et al. No light shining through a wall. *Phys.Rev.Lett.*, 99:190403, 2007. 1, D
- 62** Pierre Pugnât et al. First results from the OSQAR photon regeneration experiment: No light shining through a wall. *Phys.Rev.*, D78:092003, 2008. 1, D
- 63** Thomas Heinzl, Ben Liesfeld, Kay-Uwe Amthor, Heinrich Schwöerer, Roland Sauerbrey, et al. On the observation of vacuum birefringence. *Opt.Commun.*, 267:318–321, 2006. 1, 5, D, D.2
- 64** A. Di Piazza, K.Z. Hatsagortsyan, and C.H. Keitel. Light diffraction by a strong standing electromagnetic wave. *Phys.Rev.Lett.*, 97:083603, 2006. 1
- 65** Ralf Schutzhold, Holger Gies, and Gerald Dunne. Dynamically assisted Schwinger mechanism. *Phys.Rev.Lett.*, 101:130404, 2008. 1
- 66** A. Di Piazza, E. Lotstedt, A.I. Milstein, and C.H. Keitel. Barrier control in tunneling $e^+ - e^-$ photoproduction. *Phys.Rev.Lett.*, 103:170403, 2009. 1
- 67** F. Mackenroth, A. Di Piazza, and C.H. Keitel. Determining the carrier-envelope phase of intense few-cycle laser pulses. *Phys.Rev.Lett.*, 105:063903, 2010. 1
- 68** Daniele Tommasini, Albert Ferrando, Humberto Michinel, and Marcos Seco. Precision tests of QED and non-standard models by searching photon-photon scattering in vacuum with high power lasers. *JHEP*, 0911:043, 2009. 1
- 69** Chris Harvey, Thomas Heinzl, and Anton Ilderton. Signatures of High-Intensity Compton Scattering. *Phys.Rev.*, A79:063407, 2009. 1

- 70** Mattias Marklund and Joakim Lundin. Quantum Vacuum Experiments Using High Intensity Lasers. *Eur.Phys.J.*, D55:319–326, 2009. 1
- 71** K. Klingmüller. Pair production on the worldline. *diploma thesis*, 2004. 2
- 72** K. Ehrhold. Quantenelektrodynamik in starken äußeren feldern. *Diploma Thesis*, 2005. 2.1, 2, 5
- 73** W. Heisenberg, Paul A.M. Dirac, and V. Weisskopf. Quantum Electrodynamics: Translations of Four Papers by Heisenberg, Dirac, and Weisskopf. 1975. 3, D
- 74** W. Demtröder. *Experimentalphysik 2*, volume 5. Springer, 2009. 3
- 75** Gerald Dunne, Holger Gies, Klaus Klingmüller, and Kurt Langfeld. Worldline Monte Carlo for fermion models at large $N(f)$. *JHEP*, 0908:010, 2009. 3.3
- 76** Wolfhard Janke. Pseudo random numbers: Generation and quality checks. *Quantum Simulation of Complex Many-Body Systems*, (10):447–458, 2002. 3.3, E.1
- 77** W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge, 2007. 3.3.1, 5, E.2, E.1
- 78** B. Marx and et al. Determination of high-purity polarization state x-rays. *Optics Communications*, 284:915 – 918, 2011. 3.5, D.2
- 79** B. Marx, K. S. Schulze, I. Uschmann, T. Kämpfer, R. Löttsch, O. Wehrhan, W. Wagner, C. Detlefs, T. Roth, J. Härtwig, E. Förster, T. Stöhlker, and G. G. Paulus. High-precision x-ray polarimetry. *Phys. Rev. Lett.*, 110:254801, Jun 2013. 3.5, D.2
- 80** Carsten Henkel, Hartmut Wallis, Nathalie Westbrook, Chris I. Westbrook, Alain Aspect, et al. Theory of atomic diffraction from evanescent waves. *Appl.Phys.*, B69:277–289, 1999. 3.5
- 81** Stephen L. Adler, J.N. Bahcall, C.G. Callan, and M.N. Rosenbluth. Photon splitting in a strong magnetic field. *Phys.Rev.Lett.*, 25:1061–1065, 1970. 4, 4.1
- 82** A. Di Piazza, A.I. Milstein, and C.H. Keitel. Photon splitting in a laser field. *Phys.Rev.*, A76:032103, 2007. 4
- 83** L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*, volume 2. Cambridge University Press, 1996. B
- 84** C. Bula et al. Observation of nonlinear effects in Compton scattering. *Phys.Rev.Lett.*, 76:3116–3119, 1996. D
- 85** L. Maiani, R. Petronzio, and E. Zavattini. Effects of Nearly Massless, Spin Zero Particles on Light Propagation in a Magnetic Field. *Phys.Lett.*, B175:359, 1986. D

- 86** F. Della Valle, G. Di Domenico, U. Gastaldi, E. Milotti, G. Messineo, et al. The new PVLAS apparatus for detection of magnetic birefringence of vacuum. *Nucl.Instrum.Meth.*, A718:495–496, 2013. D.1
- 87** Gerald V. Dunne. New Strong-Field QED Effects at ELI: Nonperturbative Vacuum Pair Production. *Eur.Phys.J.*, D55:327–340, 2009. D.2
- 88** Thomas Heinzl and Anton Ilderton. Exploring high-intensity QED at ELI. *Eur.Phys.J.*, D55:359–364, 2009. D.2
- 89** Florian Hebenstreit. Schwinger effect in inhomogeneous electric fields. 2011. D.2
- 90** Massimo Altarelli, Reinhard Brinkmann, Majed Chergui, Winfried Decking, Barry Dobson, et al. XFEL: The European X-Ray Free-Electron Laser. Technical design report. 2006. D.2

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich meine Dissertation mit dem Thema

Quanteneffekte in starken Feldern

selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Mir ist bekannt, dass ich meine Dissertation zusammen mit dieser Erklärung fristgemäß nach Vergabe des Themas in dreifacher Ausfertigung und gebunden im Prüfungsamt der Universität Jena abzugeben oder spätestens mit dem Poststempel des Tages, an dem die Frist abläuft, zu senden habe.

Jena, den 1. Juni 2014

LARS ROESSLER

Abbildungsverzeichnis

2.1. Darstellung der 1-Loop Näherung der effektiven Wirkung in Form von Feynman-Diagrammen für den Fall einer Eichtheorie [72].	8
3.1. Darstellung der 2-Punkt Korrelationsfunktion als Feynman Diagramm. Die äußeren Beinchen repräsentieren die Photonenlinien, die durch die Eichfelder $A_{1,2}^\mu$ beschrieben werden. Der Loop stellt eine Integration über den internen Impuls des Feynman-Propagators dar. Die Doppellinien symbolisiert das Vorhandensein eines externen Feldes, das bedeutet den Fall $eB \neq 0$. In der sQED trägt noch ein weiteres tadpole-artiges Diagramm zu $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ bei, das im Weltlinienformalismus automatisch berücksichtigt wird.	16
3.2. Ergebnis der Weltliniensimulation für den Integranden $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ der 2-Punkt Funktion in 11-Richtung für verschiedene Massen m im Fall $B = 0$ (Vakuumfall). Als Photonenvektor wurde $k_1 = (1, 1, 1, 1)$ gewählt bei einem Ensemble von 20000 Weltlinien.	34
3.3. Verhalten des statistischen Fehlers der 2-Punkt Funktion in Abhängigkeit von der Größe des Weltlinienensembles. Die Stärke des externen Feldes wurde dabei mit $eB_0 = 0.0$ gewählt, bei einen einfallenden Photon $k = (0, 0, 0.1, 0.1)$	34
3.4. Struktur der Inhomogenität des Magnetfeldes $\vec{B}(z)$	35
3.5. Bestimmung des Vorfaktors a_\parallel im parallelen Fall für $\theta = \pi/2$ und $\omega = 0.1m$. Im Grenzfall eines schwachen Magnetfeldes ($B/B_{\text{cr}} \ll 1$, sollten die numerischen Resultate gegen den Faktor $(1/90)$ konvergieren.	37
3.6. Schematische Darstellung der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ im oszillierenden Magnetfeld $eB(z)$. Die Orientierung des Feldes in e_1 -Richtung ist durch die grünen Pfeile gekennzeichnet. Die Inhomogenität breitet sich in e_3 -Richtung aus.	38
3.7. Phasengeschwindigkeit v_\parallel im oszillierenden Magnetfeld $eB(z)$ für verschiedene Wellenlängen λ_B und Massenschwerpunkte z_{CM} für ein statistisches Ensemble von 40000 Weltlinien.	39

3.8. Phasengeschwindigkeit v_{\parallel} in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ_B für verschiedenen Phasen $\phi = \frac{2\pi}{\lambda_B} z_{\text{CM}}$. Die physikalischen und statistischen Parameter sind dabei analog zu Abbildung 3.7 gewählt worden. Für den Bereich kleiner Wellenlängen wurden die Resultate noch einmal in einer kleineren Abbildung separat dargestellt.	40
3.9. Phasengeschwindigkeit v_{\parallel} im oszillierenden Magnetfeld $eB(z_{\text{CM}})$ für verschiedene Wellenlängen λ_B und z_{CM} für ein statistisches Ensemble von 40000 Weltlinien.	41
3.10. Normalisierte Phasengeschwindigkeit $\Delta v_{\text{ph},\parallel}$ für verschiedene Wellenlängen $\lambda_B = 0.15, 0.4, 0.6, 2.0$. Die Funktionen entsprechen dabei den in Abbildung 3.9 dargestellten vertikalen Linien bei den entsprechenden Wellenlängen. .	43
3.11. Streuung eines Photons an einem Magnetfeld mit lorentzartiger Inhomogenität (symbolisiert durch schwarze Pfeile) nach Gleichung (3.19). Das einfallende Photon k_{in} kann dabei zum einen reflektiert $k_{2,out}$ werden oder propagiert in die gleiche Richtung wie das einfallende Photon weiter $k_{1,out}$. .	44
3.12. Lokale Feldnäherung nach Gleichung (3.26) in Abhängigkeit vom Massenschwerpunkt z_{CM} und der Wellenlänge λ_B	46
3.13. Verhältnis des numerischen und analytischen Ergebnisses des Korrekturterms $c_{\perp,\parallel}$ im Fall der senkrechten Polarisierung bei 40000 Weltlinien und einem Photonenvektor $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ bei einer maximalen Feldstärke von $eB_0 = 0.2$. Man erkennt, dass für kleine Wellenlängen der entsprechende numerische Korrekturterm stark von der analytischen Vorhersage abweicht.	49
3.14. Verhältnis des numerischen und analytischen Ergebnisses des Korrekturterms c_{\perp} im Fall der senkrechten Polarisierung bei 200000 Weltlinien und einem Photonenvektor $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ bei einer maximalen Feldstärke von $eB_0 = 0.2$. Man erkennt, dass für kleine Wellenlängen der entsprechende numerische Korrekturterm stark von der analytischen Vorhersage abweicht, diese jedoch zu den Rechnungen mit 40000 Weltlinien deutlich geringer ist.	50
3.15. 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,i}[z_{\text{CM}}, \dots]$ für ein Weltlinienensemble mit 40000 Weltlinien bei einer maximalen Feldstärke von $eB_0 = 0.2$. Für das einfallende Photon wurde ein Vektor von $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und entsprechend für das gestreute $k_{out} = (0, 0, -0.1, 0.1)$ gewählt. Die y -Skalierung wird dabei gemäß der Gleichung (3.27) dynamisch in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ_B angepasst. Die Anzahl der Datenpunkte liegt dabei bei $x = 59$, wobei der Punkt ϕ bei $x = 30 = 0 \equiv z_{\text{CM}}$ zu finden ist.	51

3.16. Entwicklung des statistischen Fehlers der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ in Abhängigkeit von λ_B bei einem Ensemble von 40000 Weltlinien. Die maximale Feldstärke liegt bei $eB_0 = 0.2$ und einem einfallenden Photon von $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$. In den einzelnen Abbildungen ist ebenfalls zu erkennen, dass das Signal für $z_{CM} \neq 0$ sehr schnell auf null abfällt.	52
3.17. Entwicklung des statistischen Fehlers der 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ in Abhängigkeit von λ_B bei 200000 Weltlinien. Die maximale Feldstärke liegt bei $eB_0 = 0.2$ und einem einfallenden Photon von $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$	53
3.18. 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[z_{CM}, eB_0, \lambda_B]$ für verschieden Konfigurationen von Photonenvektoren k_j im Impulsraum für ein Ensemble von 40000 Weltlinien. Die maximale Feldstärke ist $eB_0 = 0.2$. Abbildung 3.18(a) entspricht einen transmittierten Photon und Abbildung 3.18(b) den reflektierten Photon. Die Skalierung der y -Achse wurde dabei analog zu Abbildung 3.15 gewählt. Es ist zu erkennen, dass es bei $\phi = 0$ ($z_{CM} = 0$) zu Fluktuationen in Abhängigkeit von λ_B kommt, die jedoch auf numerische Artefakte zurückgeführt werden können.	54
3.19. Ergebnisse der numerischen Fouriertransformation für $\Pi_{2P,\perp}[k_3, \dots]$ für transmittierte Photonen mit $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und $k_{out} = (0, 0, -0.1, -0.1)$ sowie einen Ensemble von 40000 Weltlinien bei einer maximalen Feldstärke von $eB = 0.2$. Die Skalierung der y -Achse wurde dabei analog zu Abbildung 3.15 gewählt.	57
3.20. 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P,\perp}[k_3 = 0, \dots]$ für $k_3 = k_{in,z} + k_{out,z} = 0$ als Funktion der Feldbreite λ_B , einer maximalen Feldstärke $eB_0 = 0.2$ und einem Ensemble von 40000 Weltlinien. Das Resultat ist verknüpft mit dem über das Feldprofil integrierten Brechungsindex.	58
3.21. Ergebnisse der numerischen Fouriertransformation für $\Pi_{2P,\perp}[k_3 = 0.2, \dots]$ für ein reflektiertes Photon mit $k_{in} = (0, 0, 0.1, 0.1)$ und $k_{out} = (0, 0, 0.1, -0.1)$ sowie einem Ensemble von 40000 Weltlinien bei einer maximalen Feldstärke von $eB = 0.2$. Die Skalierung der y -Achse wurde dabei analog zu Abbildung 3.15 gewählt.	59
3.22. 2-Punkt Funktion im Ortsraum für $k_3 = k_{in,z} + k_{out,z} = 0.2$ und unterschiedliche Fitfunktionen	60
3.23. Vergleich der Analytischen Näherungsrechnung (rot) mit den Resultaten des Weltlinienformalismus für den senkrechten Polarisationsfall	61
3.24. Vergleich der Analytischen Näherungsrechnung (rot) mit den Resultaten des Weltlinienformalismus für den parallelen Polarisationsfall	62

3.25. Vergleich der numerischen Resultate mit der analytischen Näherungsrechnung im Ortsraum. Es ist in den Abbildungen 3.25(c) oder 3.25(d) zu erkennen das einzelne Punkte eine starke Abweichung besitzen, jedoch der dazugehörige statistische Fehler diese abdeckt.	63
3.26. Vergleich der Analytischen Näherungsrechnung (rot) mit den Resultaten des Weltlinienformalismus für den parallelen Polarisationsfall nach Optimierung der Fitroutinen.	64
4.1. Prozess des Photonsplittings als Feynman Diagramm. Die erste Ordnung wird als Boxdiagramm und die Zweite als Hexagondiagramm bezeichnet. Die äußeren Beinchen symbolisieren auch in diesem Fall die Eichfelder A_j^μ mit $j = 1, 2, 3$ der einzelnen Photonen (Photonenlinien), während die Kreuze Ankopplungen an das externe Feld symbolisieren.	66
4.2. Integrand $\delta\Pi_{3P}[eB, T]$ der 3-Punkt Funktion für ein Ensemble von 40000 Weltlinien und einer Feldstärke $eB = 0.2$	81
4.3. Integrand $\delta\Pi_{3P}[eB, T]$ der 3-Punkt Funktion für ein Ensemble von 200000 Weltlinien und einer Feldstärke $eB = 0.2$	83
4.4. Rechnungen für den Integrand $\delta\Pi_{3P}$ der 3-Punkt Funktion bei konstanten magnetischen Feld mit $eB = 0.2$ und ein Ensemble von 200000 Weltlinien. Der Impulsvektor ist mit $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt worden, wobei ein Teilungsverhältnis von 1 : 1 verwendet wird. Abbildung 4.4(a) zeigt den Vergleich zwischen der Entwicklung für kleine Eigenzeiten und der Weltlinienrechnung und Abbildung 4.4(b) die daraus resultierende Bestimmung des Umschaltpunktes T_D	84
4.5. Numerischer Fehler in Prozent ($0.1 \equiv 10\%$) des Integranden $\delta\Pi_{3P}$ der 3-Punkt Funktion in Abhängigkeit von der Feldstärke eB und einem Photonenvektor $k = (0, 0, 0.01, 0.01)$ (Teilungsverhältnis 1:1) bei einen Ensemble von 200000 Weltlinien.	86
4.6. Verhältnis zwischen den numerischen Ergebnissen aus den Weltlinienrechnungen (pure worldline result + small-T fit) mit den analytischen Ergebnissen für den Fall der sQED für $\omega_1 = 0.01$ bei einen Teilungsverhältnis des Photonimpulses von 1:1 mit einen Ensemble von 200000 Weltlinien. . .	87
4.7. Ergebnisse der Weltlinienrechnungen (pure worldline + small-T Fit) für verschiedene Feldstärken $eB = 0.1$ (blau), $eB = 0.2$ (grün) und $eB = 0.4$ (braun) im Vergleich zu den Rechnungen nach Adler und Schubert (rot) mit $\omega_1 = 0.01$ und einen Ensemble von 200000 Weltlinien. Dabei zeigt Abbildung 4.7(a) die Weltlinienresultate ohne den Vorfaktor und Abbildung 4.7(b) mit dem Faktor $e^{-m^2 T}/(4\pi T)^2$	88

4.8. Vergleich der numerischen Resultate für $\delta\Pi_{3P}$ (blau) mit der analytischen Rechnung nach Schubert und Adler (rot) für verschiedene Teilungsverhältnisse der austretenden Photonen. Als Ensemble wurden dabei 200000 Weltlinien verwendet.	89
4.9. Analytische Betrachtungen von $\delta\Pi_{3P}$ nach der Schubert und Adler im Bereich der lokalen Feldnäherung mit einer Feldstärke von $eB = 0.4$ und bei einer Wellenlänge von $\lambda_B = 15.0$. Die Energie des einfallende Photons wurde mit $\omega_1 = 0.01$ gewählt bei symmetrischer Teilung.	90
4.10. Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einer Wellenlänge $\lambda_B = 15.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis von 1:1.	91
4.11. Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ (blau) im Vergleich mit der analytischen Lösung (grün) für verschiedene Abstände z_{CM} mit 200000 Weltlinien. Die physikalischen Parameter sind identisch zu denen aus Abbildung 4.10(d).	92
4.12. Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einer Wellenlänge $\lambda_B = 5.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.	93
4.13. Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einer Wellenlänge $\lambda_B = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis von 1:1.	94
4.14. Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einem Phasenterm $\phi = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.	94
4.15. Fehlerdarstellung der Weltlinienrechnungen aus Abbildung 4.14(b) bei einem Abstand $z_{CM} = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0, 0.01, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.	95
4.16. Ergebnisse der Weltlinienrechnungen für $\delta\Pi_{3P}$ bei einem Phasenterm $\phi = 1.0$ (Abbildung 4.16(a)), sowie einer Wellenlänge $\lambda_B = 1.0$ (Abbildung 4.16(b)) und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0.01, 0, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.	96
4.17. Eigenzeitintegrand der Weltlinienrechnungen, von Abbildung 4.16(a), bei einem Abstand $z_{CM} = 1.0$ und einer Feldstärke von $eB = 0.4$. Für das einfallende Photon k_1 wurde $k_1 = (0, 0.01, 0, 0.01)$ gewählt mit einem Teilungsverhältnis für die auslaufenden Photonen von 1:1.	97

D.1. Darstellung des PVLAS Experimentes [59], indem das Magnetfeld durch supraleitende, drehbar gelagerte Magneten erzeugt wird.	x
D.2. Vorschlag eines experimentellen Aufbaus [63] zur Messung der Vakuumdoppelbrechung mit Hilfe von Hochintensitätslasern wie zum Beispiel POLARIS.	xi
E.1. Darstellung der Arbeitsweise einer OpenMP-Implementierung zur Parallelisierung des Weltlinienformalismus. Die einzelnen Konfigurationen von Weltlinien werden durch $\langle \dots \rangle_{x_j}$ repräsentiert.	xiv
E.2. Numerische Integration über Diskretisierung des Integrationsintervalls in N -Teilintervalle der Breite h . Anschließend kann eine Integration zum Beispiel mit Hilfe der Simpson-Regel [77] erfolgen.	xviii

Tabellenverzeichnis

3.1. Verhalten des T -Integranden $\delta\Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2]$ im feldfreien Fall (Vakuumfall) für verschiedene Raum-Zeit-Dimensionen D	23
3.2. Ergebnisse des Fits nach Gleichung (3.22) für verschiedene Wellenlängen λ_B der numerischen Resultate aus Abbildung 3.9.	42
3.3. Samplingfrequenz Δ und Nyquistfrequenz k_C für verschiedene Wellenlängen λ_B unter der Annahme einer lorentzförmigen räumlichen Inhomogenität des Magnetfeldes.	56
3.4. Mathematische Funktionen zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten . .	59
4.1. Ergebnisse für den Counterterm a	82

Verzeichnis der Listings

E.1. Parallelisierte <i>for</i> -Schleife	xiv
E.2. Numerische Integration mit Hilfe der GSL-Bibliotheken.	xix
E.3. Nonlinear least squares mit Hilfe der GSL-Bibliotheken.	xxi

A. Vektoren und Tensoren

Die vierdimensionale Variable x^μ , die auch als Weltlinienkoordinate bezeichnet wird, kann in der vollständigen Vektorschreibweise auch als:

$$x^\mu = (\vec{x}, t)$$

geschrieben werden. Die Euklidische Zeitkomponente ist dabei mit $t = x^4$ definiert, während die anderen drei Komponenten die Raumkoordinaten \vec{x} repräsentieren. Im Rahmen dieser Arbeit sollen alle Vektoren auf diese Weise definiert werden. Für das Skalarprodukt zweier Vektoren a^μ, b^μ folgt:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = \begin{cases} g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu & \text{Euklidisches Skalarprodukt} \\ \eta^{\mu\nu} a_\mu b_\nu & \text{Minkowski Skalarprodukt} \end{cases}$$

Der Tensor g ist dabei mit $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ im Euklidischen definiert. Im Rahmen der Numerik wird diese Metrik zu Berechnung der Skalarprodukte verwendet. Um aber die numerischen Ergebnisse auf reale physikalische Effekte anwenden zu können, müssen die Photonenvektoren über $k^\mu = (\vec{k}, i\omega)$ betrachtet werden. Dies führt bei einem Skalarprodukt aus Photonenvektoren eigentlich auf die minkowskiwertige Metrik η , die auch als $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ aufgefasst werden kann. Bei Berücksichtigung eines externen Feldes wird über das Eichpotential A^μ der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ mit:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

in die einzelnen Gleichungen eingebracht. Das magnetische \vec{B} und elektrische Feld \vec{E} ist in Abhängigkeit von der jeweiligen Betrachtung festgelegt. Da in dem von uns betrachteten Fall lediglich das Magnetfeld von Interesse ist, kann für das elektrische Feld mit $\vec{E} = 0$ gewählt werden. Minkowskiwertige elektrische Felder wären im Euklidischen rein imaginär.

A. Vektoren und Tensoren

Das verbleibende Magnetfeld soll definitionsgemäß für alle in dieser Arbeit betrachteten Felder in e_1 Richtung zeigen, weshalb letztendlich für den Feldstärketensor auch:

$$F^{\mu\nu} = B\Lambda^{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Der Duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ kann mit Hilfe der Bestimmungsgleichung $\tilde{F}^{i4} = B^i$ ermittelt werden, woraus sich ebenfalls eine Darstellung $\tilde{F}^{\mu\nu} = B\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}$ ergibt. In Abschnitt 3 wurden Funktionen

- $I_{\Lambda}^{\mu\nu} = \Lambda^{2,\mu\nu} k \Lambda^2 k - \Lambda^{2,\mu} k \Lambda^{2,\nu} k$
- $I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^{2,\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \tilde{\Lambda}^{2,\mu} k \tilde{\Lambda}^{2,\nu} k$
- $I_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} k^2 - k^{\mu} k^{\nu}$

zur Bestimmung der analytischen Lösung der 2-Punkt Funktion in einen konstanten Magnetfeld definiert, die mit Hilfe der Tensoren Λ und $\tilde{\Lambda}$ bestimmt werden können.

B. Das Pfadintegral

Um die Bedeutung des Pfadintegrals zu verstehen, kann dieses mit Hilfe der Propagation eines quantenmechanischen Teilchens von einem Zustand $\psi(t_i) = \psi_i$ zu einem Zustand $\psi(t_f) = \psi_f$ ableiten [83]. Bei dem Zustand handelt es sich um den Gleichen, der lediglich in der Zeit voranschreitet und im Raum an einen bestimmten Raumzeitpunkt $\{\vec{x}_j, t_j\}$ betrachtet wird. Es existieren innerhalb der Raumzeit unendlich viele Wege Γ , die das Teilchen zurücklegen kann. Um die zeitliche Propagation des Zustandes ψ_i zu beschreiben, kann die mathematische Gleichung

$$\psi_f(x_f, t_f) = \int dx_i K(x_i, t_i; x_f, t_f) \psi_i(x_i, t_i) \quad (\text{B.1})$$

definiert werden, mit dem Propagator $K(x_i, t_i; x_f, t_f) = \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle$. Der Operator \hat{U} wird auch als Zeitentwicklungsoperator der Quantenmechanik bezeichnet und besitzt die Eigenschaft, dass es sich um einen unitären Operator mit $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ handelt. Für den Fall, dass der Hamiltonoperator \hat{H} der betrachteten Theorie zeitunabhängig ist, ergibt sich dieser Zeitentwicklungsoperator zu:

$$U(t, t') = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t') \right).$$

Im Folgenden betrachten wir einen Hamiltonoperator der Form:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

Bei der gewählten Darstellung in Gleichung (B.1) handelt es sich um die Ortsdarstellung, bei der die Zustände ψ_j in quantenmechanischer Schreibweise über $\langle x_j | \psi_j \rangle$ bestimmt wer-

B. Das Pfadintegral

den. Wird nun ein beliebiger Weg Γ_j zwischen diesen beiden Zuständen betrachtet, so kann dieser in N Teilintervalle zerlegt werden, was ausgehend von Gleichung (B.1) auf

$$\begin{aligned}\psi_f(x_f, t_f) &= \int dx_i K(x_i, t_i; x_f, t_f) \psi_i(x_i, t_i) \\ &= \int dx_i \int dx_1 K(x_1, t_1; x_f, t_f) K(x_i, t_i; x_1, t_1) \psi_i(x_i, t_i) \\ &= \int dx_i \int dx_1 \dots \int dx_N K(x_N, t_N; x_f, t_f) \dots K(x_i, t_i; x_1, t_1) \psi_i(x_i, t_i)\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

führt. Im Folgenden soll nun der Propagator $K(x_i, t_i; x_j, t_j)$ zwischen zwei beliebigen Zuständen ψ_i und ψ_j explizit bestimmt werden. Dieser kann zunächst mit Hilfe des Hamiltonoperators \hat{H} und durch eine Entwicklung nach der Zeit τ

$$\begin{aligned}K(x_i, t_i; x_j, t_j) &= \langle x_j | U(t_j, t_i) | x_i \rangle \\ &= \langle x_j | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau\right) | x_i \rangle \quad \tau = t_i - t_j \\ &= \langle x_j | x_i \rangle - \langle x_j | \frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau | x_i \rangle + \mathcal{O}(\tau^2)\end{aligned}$$

geschrieben werden. Eine daraufhin separate Betrachtung des ersten Entwicklungsterms liefert

$$\begin{aligned}\langle x_j | \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) | x_i \rangle &= \int dp \langle x_j | p \rangle \left(\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \right) \langle p | x_i \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp \left(\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p(x_i - x_j)\right),\end{aligned}$$

womit für den Propagator auch

$$K(x_i, t_i; x_j, t_j) = \frac{1}{2\pi} \int dp \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \right) \tau + \frac{i}{\hbar} p(x_i - x_j)\right\} \quad (\text{B.3})$$

folgt. Für das Potential wurde der mittlere Punkt zwischen x_i und x_j gewählt, was aber nicht zwingend der Fall sein muss. Diese Gleichung kann nun wiederum für alle Teilpropagatoren in Gleichung eingesetzt werden. Diese Vorgehensweise führt auf den Ausdruck:

$$\psi_f(x_f, t_f) = \int \prod_{r=1}^N dx_r \int \prod_{s=0}^N \frac{dp_s}{2\pi} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_s^2}{2m} + V\left(\frac{x_s + x_{s-1}}{2}\right) \right) \tau + \frac{i}{\hbar} p_s(x_r - x_{r-1})\right\} \psi_i(x_i, t_i).$$

B. Das Pfadintegral

Mit Hilfe der Methode der quadratischen Ergänzung ist es möglich die Integration über p_s zu lösen und anschließend im verbleibenden Ausdruck formal $N \rightarrow \infty$ zu setzen. Als Resultat erhält man den gewünschten Ausdruck

$$I = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left(i \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}, t) \right) \quad (\text{B.4})$$

worin das Integral über den Ort x als Pfadintegral bezeichnet wird. Das Ergebnis der Integration über die Impulse ist in \mathcal{N} zusammengefasst worden und die Eigenschaften der zu betrachtenden Theorie werden über die Lagrangefunktion L oder unter Berücksichtigung der Zeitintegration über die Wirkung S in die Gleichung gegeben.

C. Greensche Funktion

Zur analytischen Lösung der effektiven Wirkung auf Niveau der 2- oder 3-Punkt Korrelationsfunktion wurden Greensche Funktionen [45; 38] $G_{B_{ij}}$, für den feldfreien Fall oder $\mathcal{G}_{B_{ij}}$ unter Berücksichtigung eines Feldes, eingeführt. In diesen Abschnitt soll gezeigt werden, wie diese Funktionen bestimmt werden können [46]. Für den Fall einer reinen bosonischen Theorie, was die sQED erfüllt, bestimmt sich die entsprechende feldabhängige Greensche Funktion zu:

$$\mathcal{G}_{B_{12}} = 2\langle\tau_1|(\partial^2 - 2iF\partial)^{-1}|\tau_2\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Dabei ist dieses Skalarprodukt auf einen vollständig periodischen Hilbertraum definiert und besitzt aufgrund des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ eine Tensorstruktur. Die vorhandene Kopplung e wurde über $eF^{\mu\nu} \equiv F$ in Gleichung (C.1) berücksichtigt. Die Tatsache, dass es sich um einen periodischen Hilbertraum handelt, führt auf den Lösungsansatz

$$\langle u|\partial^{-n}|u'\rangle = -\frac{1}{n!}B_n(|u - u'|)\text{sign}^n(u - u')$$

mit den Bernoulli Polynomen B_n , die sich rekursiv über

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \quad B_0 = 1$$

C. Greensche Funktion

bestimmen lassen. Ausgehend von diesen Regeln und unter Verwendung der Summenformel für eine geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ folgt somit aus Gleichung (C.1):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{B_{12}} &= 2\langle \tau_1 | (\partial^2 - 2iF\partial)^{-1} | \tau_2 \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (2iF)^n 2\langle \tau_1 | \partial^{-(n+2)} | \tau_2 \rangle \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} (2iF)^{n-2} 2\langle \tau_1 | \partial^{-n} | \tau_2 \rangle \\
 &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} (2iF)^{n-2} \frac{1}{n!} B_n(|\tau_1 - \tau_2|) \text{sign}^n(\tau_1 - \tau_2) \\
 &= -\frac{1}{2F^2} + \frac{1}{iF} B_1(|\tau_1 - \tau_2|) \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{1}{2F^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2iF \cdot \text{sign}(\tau_1 - \tau_2))^n}{n!} B_n(|\tau_1 - \tau_2|).
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Rekursionsformel für die Bernoulli-Polynome sowie der Gleichung $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ weiter zu vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{B_{12}} &= -\frac{1}{2F^2} + \frac{1}{iF} B_1(|\tau_1 - \tau_2|) \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) - \frac{1}{iF} \frac{\text{sign}(\tau_1 - \tau_2) e^{2iF(\tau_1 - \tau_2)}}{e^{2iF \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)} - 1} \\
 &= \frac{1}{2F^2} \left(\frac{F}{\sin F} e^{-iF\dot{G}_{B_{12}}} + iF G_{B_{12}} - 1 \right). \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

Die resultierende Gleichung (C.2) ist dabei die feldabhängige Greensche Funktion, wobei die feldfreie Greensche Funktion $G_{B_{ij}}$ sich auf analoge Weise bestimmen lässt, was auf

$$G_{B_{12}} = |\tau_1 - \tau_2| - \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{T}$$

führt. Innerhalb der Arbeit kommen noch Ableitungen der entsprechenden Funktionen $\dot{G}_{B_{ij}}$ und $\ddot{G}_{B_{ij}}$ vor, die immer nach der ersten Komponente gebildet werden. Im betrachteten Beispiel bedeutet dies genauer:

$$\dot{G}_{B_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \tau_i} G_{B_{ij}}.$$

D. Experimentelle Ansätze

Nachdem 1936 von Heisenberg und Euler [1] erstmals nichtlineare Effekte im Quantenvakuum untersucht und die Möglichkeit der Paarerzeugung in starken Feldern prognostiziert wurde [6], stellte sich die Frage nach einem experimentellen Nachweis dieser Effekte. Die Lasertechnik entwickelte sich jedoch erst Jahrzehnte später und so blieb es zunächst bei theoretischen Betrachtungen. Diese wurden unter anderem von Weisskopf [73] und Schwinger [3] vorgenommen. Außerdem zeigten 1964 Klein und Nigam [4] das das Quantenvakuum aufgrund einer virtuellen Paarerzeugung, Doppelbrechende Eigenschaften annehmen kann. Baier und Breitenlohner untersuchten diesen Sachverhalt genauer [5] und prägten den Begriff der Vakuumdoppelbrechung. Erst Anfang der 90er Jahre des vergangenen Jahrhunderts, als die Lasertechnik die Möglichkeit bot entsprechende Experimente vorzunehmen, wurden erste Konzepte zum Nachweis der Paarbildung oder auch Vakuumdoppelbrechung entwickelt [84]. Die wichtigste charakteristische Skala für die Entwicklung eines Experimentes ist dabei die kritische Feldstärke E_C mit

$$E_C = \frac{m_e}{e} \approx 1.3 \cdot 10^{18} \frac{V}{m}, \quad (B_C \approx 4.3 \cdot 10^9 T),$$

und die daraus resultierende kritische Intensität:

$$I_C = E_C^2 \approx 4.4 \cdot 10^{29} \frac{W}{cm^2}.$$

In beiden Gleichungen bezieht sich die Rechnung auf die Bildung eines Elektron-Positron Paares auf Skala der Comptonwellenlänge, weshalb für die Masse die Elektronenmasse m_e und die Elementarladung e gewählt worden ist. Aktuelle Laseranlagen, wie zum Beispiel POLARIS in Jena, könnten voraussichtlich prognostizierte Laserintensitäten von $10^{22} \frac{W}{cm^2}$ erreichen, was somit noch einige Größenordnungen unterhalb der kritischen Intensität I_C liegt. Die theoretischen Vorhersagen prognostizieren jedoch die reelle Bildung

D. Experimentelle Ansätze

eines Positron-Elektron Paares erst ab Intensitäten oder Feldstärken nahe der kritischen Intensität oder Feldstärke. Eine Betrachtung von Heinzl, Wipf et al [63] zeigt nach

$$\begin{aligned}\nu^2 &\equiv \frac{\omega^2}{m_e^2} \approx 4 \cdot 10^{-6} \ll 1, \\ \epsilon^2 &\equiv \frac{I}{I_C} \approx 2 \cdot 10^{-8} \ll 1,\end{aligned}$$

eine Abschätzung basierend auf aktuellen Laseranlagen, dass sich eine experimentelle Betrachtung im Bereich kleiner Intensitäten und Energien befindet. Somit lassen sich die zu messenden Parameter wie Brechzahl n oder Elliptizität δ in einer Schwachfeldnäherung betrachten. Beide Parameter sind entscheidend zur Messung der Vakuumdoppelbrechung, da dieser Effekt schon bei Intensitäten deutlich unterhalb der kritischen Intensität auftreten sollte. Diese Parameter sind ein Maß für den Nachweis einer virtuellen Paarerzeugung. Genauer ergibt sich für n_{\pm} und δ in dieser Näherung:

$$\begin{aligned}n_{\pm} &= 1 + \binom{14}{8} \frac{\alpha}{45\pi} \frac{I}{I_C}, \\ \delta &\approx \frac{4\alpha}{30} \frac{d}{\lambda} \frac{I}{I_C}.\end{aligned}\tag{D.1}$$

In Gleichung (D.1) beschreibt n_{\pm} die Brechzahl in der vollständigen QED, d die Weglänge des Photons durch das entsprechende externe Feld und λ die Wellenlänge des Probelasers oder der einfallenden Photonen. Somit ergeben sich für den Nachweis der Vakuumpolarisation für das Experiment zwei Ansatzpunkte, da die Intensität der Laser nicht beliebig erhöht werden kann. Zum einen ist das die Vergrößerung der Weglänge d durch das externe Feld (PVLAS) und zum anderen die Wellenlänge des Probelasers zu verringern, indem zum Beispiel anstelle eines optischen Lasers ($\approx 1\mu m$) eine Röntgenquelle ($\approx 1nm$) verwendet wird (Helmholtz Beamline). Im Nachfolgenden sollen zwei Experimente zur Messung der Vakuumdoppelbrechung etwas genauer vorgestellt werden. Es gibt aber noch eine Vielzahl weiterer Experimente wie Q and A [60], BMV [61] oder OSQAR [62] die sich eine Untersuchung von nichtlinearen Effekten in starken Feldern zum Ziel gesetzt haben. Dabei steht nicht nur die Messung von Paarbildung oder Vakuumpolarisation im Mittelpunkt, sondern auch der Nachweis von hypothetischen Teilchen [85; 30; 31; 32], die das Verständnis vom Aufbau des Universums erweitern sollen.

D. Experimentelle Ansätze

D.1. PVLAS

Ziel des italienischen Projektes PVLAS [58; 59] ist die Messung der Vakuumpolarisation im konstanten Magnetfeld B . Nach Gleichung (D.1) wird dabei der Ansatz verfolgt mit Hilfe eines Fabry-Perot Interferometers die Weglänge d des Photons durch das Feld zu verlängern. In Abbildung D.1 ist der Aufbau des Experimentes schematisch dargestellt. Dabei wird ein Photon mit der Wellenlänge $\lambda = 1064nm$ zunächst mit Hilfe eines Pola-

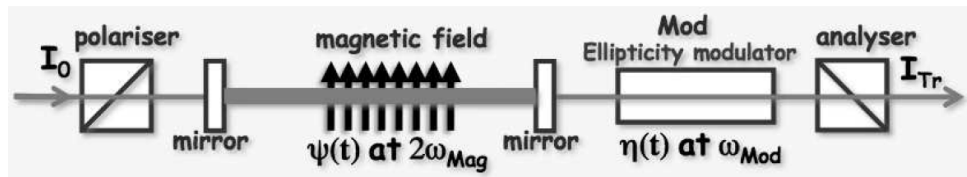


Abbildung D.1.: Darstellung des PVLAS Experimentes [59], indem das Magnetfeld durch supraleitende, drehbar gelagerte Magneten erzeugt wird.

risators entsprechend polarisiert und dann in das Interferometer gegeben. Dabei liegt auf einer Weglänge von $d = 1m$ ein konstantes Magnetfeld mit einer maximalen Feldstärke von bis zu $B = 5.5T$ an. Nach Durchlaufen des Interferometers soll die Elliptizität δ mit Hilfe eines entsprechenden Polarimeters gemessen werden. Die Elliptizität kann in diesem Fall analog zur Gleichung (D.1) auch über:

$$\delta \approx \pi \frac{L_{eff} \Delta n}{\lambda} \sin(2\theta)$$

abgeschätzt werden, in der L_{eff} die effektive Länge nach Durchlaufen des Interferometers darstellt und θ den Winkel zwischen der Richtung des externen Feldes und der Polarisationsrichtung des einfallenden Photons. Das in diesem Fall der Winkel θ berücksichtigt wird liegt daran, dass das entsprechende Feld rotierbar gelagert ist. Das bedeutet es kann die Richtung des externen Feldes entsprechend verändert werden. Weil es sich bei den verwendeten Magnet um subraleitende Magneten handelt ist diese Anordnung technisch nicht leicht umzusetzen. Nachdem bis 2007 erste Daten aufgenommen worden sind und damit erste Grenzen für die Elliptizität gefunden wurden, ist nun der Aufbau des PVLAS 2 Experimentes im Gange mit dem erstmals Vakuumdoppelbrechung gemessen werden soll [86]. Unter anderem soll die Sensitivität der Anlage durch die Verwendung von Permanentmagneten anstelle von Supraleitenden vergrößert werden.

D.2. POLARIS

Einen anderen Ansatz verfolgt der experimentelle Aufbau aus Abbildung D.2, der unter anderem mit dem in Jena befindlichen POLARIS Lasersystem realisiert werden könnte. Die Wellenlänge dieses Lasers liegt dabei bei $\lambda_L = 1030\text{nm}$ bei einer Puls wiederholungsrate von $f = 1/40\text{Hz}$. Die maximale Laserintensität dieses Systems kann voraussichtlich $I = 10^{22} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ erreichen. Im Gegensatz zum PVLAS Experiment wird aber in diesem Fall die Elliptizität δ durch die Verwendung eines Probelasers im Röntgenbereich ($\lambda = 1.2\text{nm}$) erhöht. Die Weglänge d beschreibt dabei den Weg, den das Röntgenphoton durch den Fokalbereich des Laserpulses (Hauptlaser) zurücklegt. Denn nur in diesem Bereich wird die maximale Feldintensität und -stärke ($E \approx 4 \cdot 10^{14} \frac{\text{V}}{\text{m}}$) bei d im μm -Bereich erreicht. Der

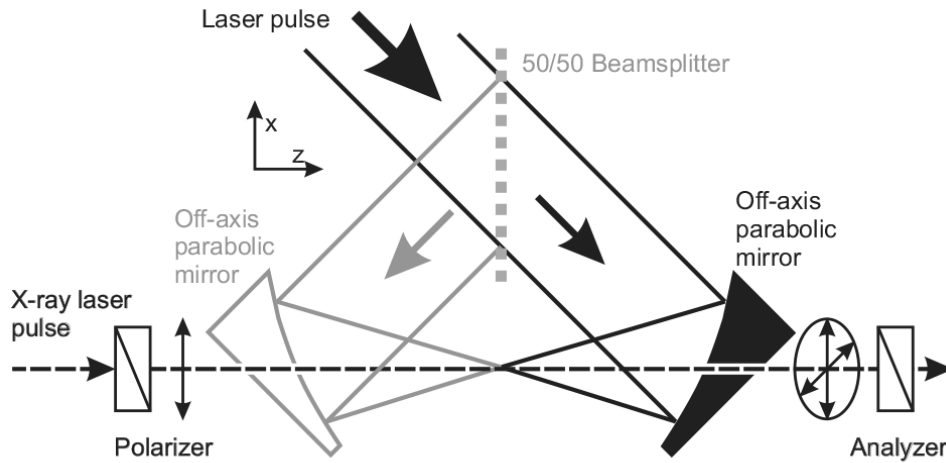


Abbildung D.2.: Vorschlag eines experimentellen Aufbaus [63] zur Messung der Vakuumdoppelbrechung mit Hilfe von Hochintensitätslasern wie zum Beispiel POLARIS.

grundlegende Aufbau hinsichtlich der Verwendung eines Polarimeters entspricht dem des PVLAS Experimentes, jedoch wird das linear-polarisierte Licht des Röntgenlasers über Löcher in den zur Fokussierung des Lasers notwendigen Parabolspiegel in die Fokalregion des Hauptlasers geleitet. Die dabei am POLARIS-Lasersystem in Zukunft erreichbare Elliptizität beträgt [63]:

$$\delta_{\text{POLARIS}}^2 = 3.4 \cdot 10^{-13}.$$

Diese kann durch eine Vergrößerung der Laserintensität I , wie es in der Zukunft im ELI Projekt [87; 88] möglich sein könnte, noch einmal deutlich erhöht werden. Auch die Verwendung von Röntgenquellen wie zum Beispiel mit XFEL (Helmholtz-Beamline) [89; 90] steht in der Diskussion, wozu die Entwicklung eines Röntgen-Polarimeters [78; 79] mit

D. Experimentelle Ansätze

hoher Auflösung von entscheidender Bedeutung ist. Die aktuelle Reinheit eines solchen Polarimeters liegt bei $2.4 \cdot 10^{-10}$ [79], womit eine Elliptizität um die $\delta = 10^{-11}$ messbar ist. Die Idee XFEL als Probelaser zu verwenden ist darauf zurückzuführen, dass ein Laser mit der Intensität um die $10^{22} \frac{W}{cm^2}$ benötigt wird. Hierbei liegt jedoch die mittlere Pulsdauer bei $t = 100ps$, weshalb der entsprechende Röntgenlaser eine vergleichbare Pulsdauer benötigt.

E. Die Numerische Arbeitsweise

Ein Großteil der Arbeit bestand in der Umsetzung der mathematischen Gleichungen aus dem Weltlinienformalismus in numerischen Routinen. Dabei konnten wir zum einem auf vorgefertigte Programmbibliotheken, wie die GSL-Bibliothek zurückgreifen, mussten aber auch eigene Algorithmen entwickeln. Die GSL-Bibliothek bietet den Vorteil, dass die zahlreichen mathematischen Routinen ausgiebig getestet worden sind und eine einfache Implementierung ermöglichen. Im nachfolgenden Abschnitt sollen einzelne wichtige Arbeitsschritte erläutert werden, wobei als Beispiel der Polarisationsensor $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ dienen soll. Die numerische Umsetzung von höherwertigen Korrelationsfunktionen erfordert dabei keine neue Numerik, sondern erfolgt in analoger Weise.

E.1. Numerische Behandlung des Pfad- und Eigenzeitintegrals

Aufgrund der Verbreitung in der aktuellen Computertechnik und der hohen Anpassungsfähigkeit, haben wir uns dazu entschieden die Programmiersprache *C++* zu verwenden. Weil diese von verschiedenen Plattformen unterstützt wird und auch das Programmieren auf aktueller Hardware ermöglicht, bietet sie Vorteile gegenüber Fortran oder anderen Sprachen. Vor allem eine leichte Implementierung von Multithreading-Routinen ist dabei von zentraler Bedeutung. Unter Multithreading ist genauer die Aufteilung der Rechenoperationen auf mehrere Prozessoren (Arbeitsthreads) zu verstehen (Abbildung E.1), die am Ende wieder zu einem Prozess (Hauptthread) zusammen geführt werden. Da im Rahmen des Weltlinienformalismus das entsprechende Integral nach

$$\int \mathcal{D}x (\dots)_x \rightarrow \frac{1}{N_L} \sum_j^{N_L} (\dots)_{x_j} \quad (\text{E.1})$$

diskretisiert werden kann und die einzelnen Weltlinien $\{x_j\}$ nicht untereinander koppeln, lässt sich die Berechnung für die einzelnen Konfigurationen sehr gut auf separate Prozessoren verteilen. Als Parallelisierungsroutine haben wir die *OpenMP*-Bibliotheken des gcc-Compilers verwendet. Diese bieten den Vorteil, dass sich *for*-Schleifen über einen

E. Die Numerische Arbeitsweise

Präprozessorbefehl einfach parallelisieren lassen und eine automatische Anpassung an die jeweilige Hardware erfolgt.

Listing E.1: Parallelisierte *for*-Schleife

```

1 #pragma omp parallel for
2 for (int i = 0; i < NumberOfLoops; i++) {
3     printf("Thread %d", i);
4 }
    
```

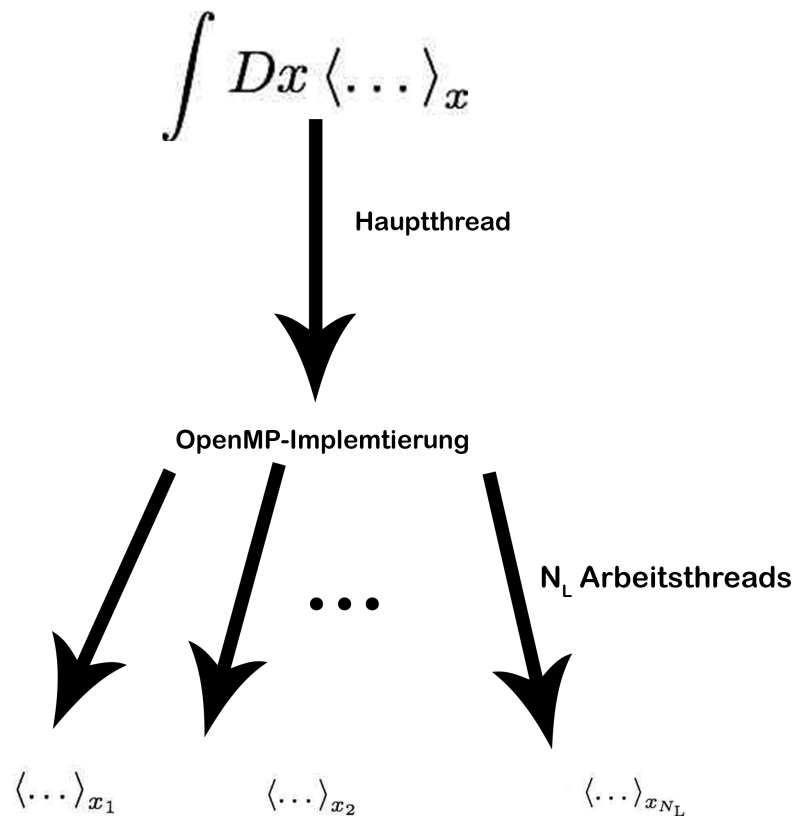


Abbildung E.1.: Darstellung der Arbeitsweise einer OpenMP-Implementierung zur Parallelisierung des Weltlinienformalismus. Die einzelnen Konfigurationen von Weltlinien werden durch $\langle \dots \rangle_{x_j}$ repräsentiert.

In Listing E.1 ist ein Beispiel für eine mit *openMP* parallelisierte *for*-Schleife angegeben. Dabei wird mit dem Präprozessorbefehl, der mit den Kürzel # gekennzeichnet ist, darauf hingewiesen, dass die nachfolgende *for*-Schleife als parallelisierter Codeabschnitt

E. Die Numerische Arbeitsweise

behandelt werden soll. Der Vorteil dieser Methode ist darin zu finden, dass die Anzahl der Threads nicht im Quellcode vor spezifiziert werden muss, sondern durch das System selbst festgelegt wird. Damit ist eine schnelle systemübergreifende Anwendung des Codes möglich. Im Falle des Pfadintegrals wird die Anzahl der Schleifendurchläufe durch die Anzahl der Weltlinien N_L bestimmt. Eine genauere Betrachtung von Gleichung (E.1) zeigt außerdem, dass noch ein Integral über die Weltlinienkoordinaten vorhanden ist. Dieses Integral muss ebenfalls zunächst diskretisiert werden und führt auf:

$$\int_0^T d\tau f(x_j(\tau)) \rightarrow \frac{T}{N_{\text{ppL}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{ppL}}} f(x_{j,k}). \quad (\text{E.2})$$

In diesem Zusammenhang müsse die Weltlinienpunkte $x_{j,k}$ mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators bestimmt werden. Die Anzahl der benötigten Koordinaten wird durch N_{ppL} , das heißt der Anzahl der Datenpunkte pro Weltlinie, bestimmt. Dabei verwenden wir zunächst die *Box-Müller-Methode* [76] zur Generierung eines Ensembles aus gaußförmig nach $\exp(-\omega^2)$ verteilten Zufallszahlen. Letztere sind zunächst in einem Intervall $x_k \in [0, 1]$ definiert und werden im einzelnen durch einen Initialisierungswert (Seed) bestimmt. Dieser bietet den Vorteil dass ein und dasselbe Ensemble von Zufallszahlen mehrfach generiert werden kann und somit eine Reproduzierbarkeit einzelner Ergebnisse garantiert ist. Vor allem zur Durchführung späterer Tests der Numerik ist diese Eigenschaft hilfreich. Betrachten wir zunächst das diskutierte Pfadintegral im Detail

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x(\dots)_x &= \int_{x(0)=x(1)} \mathcal{D}x(\dots)_x \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{N_L} \sum_i^{N_L} (\dots)_{x_i}, \end{aligned}$$

wobei die Weltlinien x_i nach dem Gewicht $\exp\left(-\frac{N_{\text{ppL}}}{4} \sum_{j=1}^{N_{\text{ppL}}} (x_j - x_{j-1})^2\right)$ verteilt sein sollen. Dies stellt an die Weltlinien die folgenden Forderungen:

1. Nach $x(0) = x(1)$ muss es sich um geschlossene Pfade handeln, womit für die Zufallszahlen gilt $x_0 = x_{N_{\text{ppL}}}$.
2. Die Funktion $\exp(\dots)$ fordert eine Gaußverteilung der Geschwindigkeiten \dot{x}_j .

Mit den V-Loop Algorithmus [50] ist ein Verfahren entwickelt worden, welches aus den zuvor bestimmten Zufallszahlen ein Ensemble generiert, das genau diese Forderung erfüllt und mit welchem letztendlich das Pfadintegral numerisch behandelt werden kann. Ziel

E. Die Numerische Arbeitsweise

dieser Methode ist es zuerst mit Hilfe einer Koordinatentransformation die Exponentialfunktion in eine reine Gaussform zu bringen, um der Verteilung der Zufallszahlen zu entsprechen. Dabei wurde im ersten Schritt in den blau markierten Summanden (Gleichung (E.3)) von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass es sich um geschlossene Pfade handelt, die die Bedingung $x_0 = x_N = -x_1 - x_2 - \dots - x_{N-1}$ erfüllen. Des weiteren gibt N die Anzahl der Punkte pro Weltlinie an, was zuvor mit N_{ppL} bezeichnet wurde.

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{N}{4} \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1})^2 \right) &= \exp \left(-\frac{N}{4} \sum_{j=2}^{N-1} (x_j - x_{j-1})^2 + (x_1 - x_0)^2 + (x_N - x_{N-1})^2 \right) \\ &= \exp \left(-\frac{N}{4} \sum_{j=2}^{N-1} (x_j - x_{j-1})^2 + (2x_1 + x_1 + \dots + x_{N-1})^2 + (x_1 + x_2 + \dots + 2x_{N-1})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Nun können die Koordinatentransformationen:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{3}{2}x_1 + x_2 + \dots + x_{N-2} + \frac{3}{2}x_{N-1} \\ v_i &= x_i - x_{i-1} \\ v_{i,j} &= x_i - x_j \quad i \geq j \end{aligned}$$

auf Gleichung (E.3) angewendet werden, woraus folgt:

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{N}{4} \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1})^2 \right) &= \exp \left(-\frac{N}{4} \sum_{j=2}^{N-1} v_i^2 + (\bar{v}_1 - \frac{1}{2}v_{N-1,1})^2 + (\bar{v}_1 + \frac{1}{2}v_{N-1,1})^2 \right) \\ &= \exp \left(-\frac{N}{4} \sum_{j=2}^{N-1} v_i^2 + 2\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}v_{N-1,1}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

In Gleichung (E.4) ist zu erkennen, dass die Variable \bar{v}_1 im Exponenten in der gewünschten Form vorkommt. Im Nachfolgenden kann diese Vorgehensweise dazu verwendet werden um schrittweise die Summation über v_i abzuarbeiten. Dabei wird entsprechend im nächsten Schritt über

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{N-1} v_i^2 + \frac{1}{2}v_{N-1,1}^2 &= \sum_{j=2}^{N-2} v_i^2 + v_{N-1}^2 + \frac{1}{2}(v_{N-1} + v_{N-2,1})^2 \\ &= \sum_{j=2}^{N-2} v_i^2 + \frac{3}{2}\bar{v}_{N-1}^2 + \frac{1}{3}v_{N-2,1} \end{aligned}$$

E. Die Numerische Arbeitsweise

vorgegangen und der Ausdruck mit der Substitution $\bar{v}_{N-i} = v_{N-i} + \frac{1}{i+2}v_{N-i-1,1}$ (rot-markierter Bereich) vereinfacht. Somit resultiert nach iterativer Anwendung dieser Substitution für den Exponenten in Gleichung (E.3)

$$-\frac{N}{4} \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1})^2 = 2\bar{v}_1^2 + \frac{2}{3}\bar{v}_{N-1}^2 + \cdots + \frac{i+2}{i+1}\bar{v}_{1N-i}^2 + \cdots + \frac{N}{N-1}\bar{v}_2^2,$$

womit letztendlich der Exponent des Pfadintegrals die gesuchte reine Gaussform besitzt. Zur Anwendung des V-Loop Algorithmus wird nun die gezeigte Vorgehensweise umgekehrt angewendet. Das bedeutet im genaueren, dass aus den erzeugten Zufallszahlen ω_i zunächst die Variablen \bar{v}_i bestimmt werden müssen. Anschließend ist es das Ziel die gemachten Substitutionen rückwärts anzuwenden bis am Ende das zur Bestimmung des Pfadintegrals gesuchte Ensemble $\{x_i\}_{i=1}^N$ von Zufallszahlen bereitgestellt wird. Es ist im Rahmen der Numerik darauf zu achten, dass es sich bei den einzelnen Weltlinienkoordinaten um eine $D = 4$ -dimensionale Koordinate handelt, womit ein 4-dimensionales Ensemble von Zufallszahlen benötigt wird. Dies kann über eine Variation des Seed-Wertes der Box-Müller-Methode generiert werden. Zusammenfassend kann das Pfadintegral mit Hilfe des Weltlinienformalismus auf die folgende Weise behandelt werden:

1. Erzeugung eines Ensembles von gaußverteilten Zufallszahlen ω_i mit Hilfe eines *Box-Müller*-Verfahrens.
2. Erzeugung der zur Lösung des Pfadintegrals benötigten Zufallszahlen x_i aus den Ensemble ω_i mit Hilfe des V-Loop Algorithmus.
3. Parallelisierung einzelner Routinen zur Beschleunigung der Numerik und Anpassung an Clustersysteme.

Nachdem das Pfadintegral mit Hilfe der Weltliniennumerik behandelt worden ist, besteht die nächste Schwierigkeit in der Lösung des Eigenzeitintegrals über den Parameter T . Genauer wurde mit Hilfe des vorangegangenen Algorithmus, zum Beispiel auf Niveau der 2-Punkt Funktion, nur der Wert $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T]$ bestimmt, der noch explizit von einem Eigenzeitparameter T abhängig ist. Zur Bestimmung der eigentlichen 2-Punkt Funktion $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ ist nach

$$\Pi_{2P}^{\mu\nu} = \int_0^T dT \delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}[T]$$

noch die Ausführung einer numerischen Integration notwendig, was im Nachfolgenden kurz beschrieben werden soll. Zur Implementierung der numerischen Integration, haben wir die frei verfügbare auf C++ basierende GSL-Bibliothek verwendet. Trotz allem ist

E. Die Numerische Arbeitsweise

ein grundlegendes Verständnis der Arbeitsweise der einzelnen Algorithmen notwendig. Bei einer numerischen Integration kommt es in erster Linie auf die Diskretisierung des zu betrachtenden Integrationsintervalls an. Eine Möglichkeit besteht darin das Integrati-

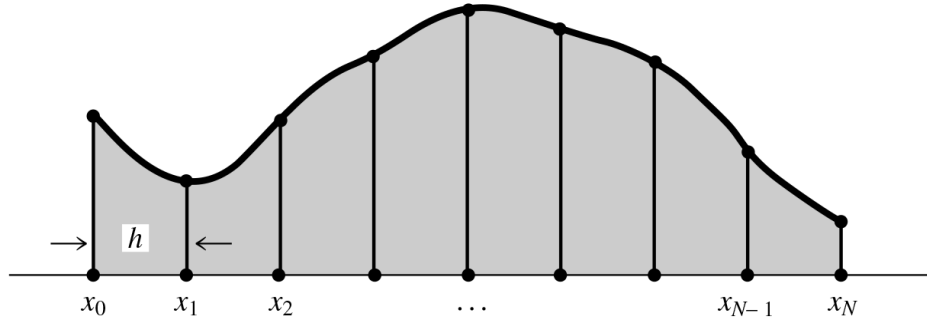


Abbildung E.2.: Numerische Integration über Diskretisierung des Integrationsintervalls in N -Teilintervalle der Breite h . Anschließend kann eine Integration zum Beispiel mit Hilfe der Simpson-Regel [77] erfolgen.

onsintervall, wie in Abbildung E.2 mit Hilfe einer konstanten Schrittweite h in einzelne Teilintervalle zu zerlegen. Dieser Ansatz [77] ist die einfachste Methode einer numerischen Integration. Dabei wird ein Integral der Form

$$\int_a^b dx f(x) \rightarrow \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f_i$$

zunächst diskretisiert, wobei die Schrittweite h über die Anzahl der Stützstellen N bestimmt wird. Mit dem Ausdruck f_i ist die Funktion $f(x_i)$ an der Stelle x_i gemeint. Diese Methode bietet den Vorteil, dass sie numerisch sehr leicht umzusetzen ist, jedoch hinsichtlich der Genauigkeit sehr stark von der Wahl des Parameters h abhängig ist. Eine weitaus elegantere Möglichkeit der numerischen Integration ist die dynamische Anpassung der Schrittweite h an die momentan zu bestimmende Integration. Dabei wird zunächst das Integral in der Form

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \omega(x)g(x)$$

definiert, mit einer Wichtungsfunktion $\omega(x)$, die je nach verwendeten Integrationsalgorithmus vorbestimmt ist. Die dynamische Anpassung des Intervalls erfolgt nun über die Vorgabe von Fehlerbereichen an den Algorithmus. Dabei wird der Fehler an den jeweiligen Grenzen des Teilintervalle bestimmt, wobei im Falle eines zu großen Fehlers das entsprechende Intervall erneut geteilt wird. Der Vorteil dieser Methode ist, dass gerade

E. Die Numerische Arbeitsweise

bei problematischen Stellen der zu integrierenden Funktion, das Integral bis auf einen vorher festgelegten absoluten Fehler genau bestimmt werden kann. Der Fehler ist bestimmt über:

$$|\text{Result} - I| \leq \text{Fehler}.$$

Dabei bezeichnet I mit

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx$$

ein Modellintegral, was vom jeweiligen Algorithmus (zum Beispiel Gaußsches Integral) verwendet wird und *Result* die Abschätzung des Integrals durch den Algorithmus.

Listing E.2: Numerische Integration mit Hilfe der GSL-Bibliotheken.

```

1 gsl_integration_workspace *w = gsl_integration_workspace_alloc(1000);
2
3 gsl_function F;
4 F.function = &f
5 F.params = &Parameter //Funktionsparameter
6
7 gsl_integration_qags (&F, 0, 1, 0, 1e-7, 1000, w, &result, &error);
8
9 gsl_integration_workspace_free (w);
    
```

In Listing E.2 ist beispielhaft der Quellcode für eine solche numerische Integration angegeben. Dabei wird mit F die zu integrierende Funktion an die Numerik übergeben und die Genauigkeit mit einem Fehler von $1 \cdot 10^{-7}$ festgelegt. Die Funktion *gsl_integration_workspace* reserviert dabei den erforderlichen Speicherplatz, der zum Abspeichern der einzelnen Teilintervalle (im Beispiel $N_S = 1000$) zur Verfügung steht. Im Rahmen des Weltlinienformalismus zeigt sich, dass das in Listing E.2 gezeigte Beispiel die besten Resultate liefert. Der Nachteil dieser Methode liegt jedoch darin, dass bei einer erhöhten Streuung der einzelnen Punkte $\delta \Pi_{2P}^{\mu\nu}$ die Anzahl der Stützstellen N_S sehr schnell große Werte annehmen kann und somit mehr Rechenzeit benötigt wird. Infolgedessen muss bei der Wahl des Fehlers darauf geachtet werden, dass die erforderliche Rechenzeit im Bezug auf die gewünschte Genauigkeit nicht zu hoch ist. Im Rahmen der durchgeführten Stabilitätstests konnten wir den optimalen Werte bei $1 \cdot 10^{-5}$ festsetzen. Sollte es im Rahmen der Numerik nicht

möglich sein die festgelegte Fehlergrenze zu erreichen, so bricht die Integration mit einer Fehlermeldung ab.

E.2. Das nonlinear-least-squares Verfahren

Im Fall der 2-Punkt Funktion ist zur Bestimmung von $\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ eine Renormierung zur Beseitigung der Divergenzen des Integrals bei kleine Eigenzeiten notwendig. Hierzu wird die Funktion $\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu}$ um kleine Eigenzeiten T herum entwickelt (*heat-kernel*-Entwicklung). Dabei erhalten wir ein Polynom der Art

$$\delta\Pi_{2P}^{\mu\nu} = a + bT + cT^2 + dT^3 + \mathcal{O}(T^4) \quad (\text{E.5})$$

in dem die einzelnen Koeffizienten numerisch bestimmt werden müssen. Zur Bestimmung dieser Koeffizienten verwenden wir das *nonlinear-least squares*-Verfahren oder auch die Methode der kleinsten Quadrate. Ausgehend von Gleichung (E.5) müssen vier verschiedene Koeffizienten $\{a, b, c, d\}$ bestimmt werden. Dabei werden an den Algorithmus m verschiedene Datenpunkte $\{x_i \equiv T_i, y_i \equiv \delta\Pi_{2P,i}^{\mu\nu}\}_{i=1}^m$ übergeben. Zur Bestimmung der Koeffizienten werden hierbei mindestens vier Datenpunkte benötigt, weil $m \geq n$ gelten muss. Die Anzahl der zu bestimmenden Datenpunkte wird mit n bezeichnet. Ziel der Methode ist es die Gleichung

$$S = \sum_{i=1}^m r_i^2(x_i) \quad (\text{E.6})$$

zu minimieren, wobei für $r_i(x_i) = y_i - f(x_i, \beta)$ gelten soll. Die Funktion $f(x_i, \beta)$ beschreibt die zu findende Modellfunktion mit den Koeffizienten $\{\beta_j\}_{j=1}^n$, die in unserem Fall der Gleichung (E.5) entspricht. Um nun das globale Minimum von Gleichung (E.6) zu finden, ist es notwendig die Ableitung nach den einzelnen Koeffizienten β_j zu bestimmen, die anschließend null gesetzt wird. Ausgehend von dieser Vorgehensweise ergibt sich ausgehend von Gleichung (E.6) der Ausdruck:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 2 \sum_{i=1}^m r_i(x_i) \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{i=1}^m r_i(x_i) \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j} \equiv 0.$$

In numerischer Hinsicht wird diese Minimierung iterativ vorgenommen, wobei im ersten Schritt für die einzelnen Koeffizienten Initialisierungswerte gewählt werden müssen. Auf diese Weise werden die einzelnen Parameter in jedem Iterationsschritt neu definiert, bis das gesuchte globale Minimum approximativ gefunden worden ist. Der Vorteil des *nonlinear-least-squares*-Verfahrens besteht darin, dass für die Modellfunktion $f(x_i, \beta)$ be-

E. Die Numerische Arbeitsweise

liebige Funktionen gewählt werden können, und diese sich auch numerisch ohne großen Ressourceneinsatz bestimmen lassen. Jedoch ist der Erfolg der Methode zum Großteil von der Wahl der Initialisierungswerte abhängig, weshalb zumindest die Größenordnung der Parameter β_j bekannt sein sollte. Im Rahmen der von uns verwendeten Numerik, konnten wir das beschriebene Verfahren wiederum mit Hilfe der GSL-Bibliotheken einfügen. In Listing E.3 ist ein Codebeispiel für die Implementierung des Algorithmus angegeben, wie es von uns verwendet worden ist. Dabei muss zunächst mit der Funktion `f`, die Routine initialisiert werden. An diese Funktion werden im Weiteren die einzelnen Definitionen der Gleichung `expb_...` übergeben. Dabei muss die Gestalt der Gleichung (E.5) (`expb_f`) und der Ableitung nach den jeweiligen Koeffizienten (`expb_df`) definiert werden. Die Anzahl der Parameter (`p`), sowie die Initialisierungswerte (`d`) werden anschließend gesondert an die Funktion `f` übergeben. Die weiteren Befehle starten den Algorithmus, wobei die Präprozessorbefehle später nur die Ausgabe der einzelnen Ergebnisse vereinfachen sollen. Die Anforderungen an die Hardwareressourcen sind dabei äußerst gering, weil durch das iterative Verfahren jeweils nur die aktuellen Werte der einzelnen Parameter gespeichert werden müssen.

Listing E.3: Nonlinear least squares mit Hilfe der GSL-Bibliotheken.

```

1 const gsl_multifit_fdfsolver_type *T;
2 gsl_multifit_fdfsolver *s;
3
4 gsl_multifit_function_fdf f;
5
6     f.f = &expb_f;
7     f.df = &expb_df;
8     f.fdf = &expb_fdf;
9     f.n = n;
10    f.p = p;
11    f.params = &d;
12
13    T = gsl_multifit_fdfsolver_lmsder;
14    s = gsl_multifit_fdfsolver_alloc (T, n, p);
15    gsl_multifit_fdfsolver_set (s, &f, &x.vector);
16
17    gsl_multifit_covar (s->J, 0.0, covar);
18 #define FIT(i) gsl_vector_get(s->x, i)
19 #define ERR(i) sqrt(gsl_matrix_get(covar,i,i))

```

E. Die Numerische Arbeitsweise

Ein weiterer Vorteil der Methode ist, dass an die einzelnen Koeffizienten auch analytische Werte übergeben werden können. Somit muss nur im ungünstigsten Fall die maximale Anzahl, im Fall der 2-Punkt Funktion $p = 4$, der Koeffizienten numerisch bestimmt werden. Im günstigsten Fall können für die Koeffizienten a und b die analytischen Werte an den Algorithmus übergeben werden, weshalb in diesem Fall $p = 2$ gesetzt wird. Wie schon im Fall der 2-Punktion umfangreich erläutert worden ist, wird das Verfahren jeweils für die Fälle $p = 2, 3, 4$ durchgeführt, und anschließend das Resultat gewählt, das den besten Überlapp mit der lokal-konstanten Näherung aufweist.

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name: Lars Rößler
Anschrift: Stauffenbergstraße 32
07747 Jena
Telefon: 0151 40420890
E-Mail: lars.roessler@freenet.de
Geburtsdatum: 11. Juli 1984
Geburtsort: Altenburg
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch

Studium

10/2004 - 11/2009 **Studium der Physik (Diplom)**, *Friedrich Schiller Universität, Jena.*
31. August 2006 Erhalt des Vordiploms
Note: 1.2 (sehr gut)
10/2008 - 11/2009 **Diplomarbeit**, *im Fachbereich Quantenfeldtheorie*, am Theoretisch-Physikalisches Institut.
Betreuer: Prof. Dr. Holger Gies
Thema: Vakuumpolarisation in räumlich inhomogenen Magnetfeldern
30. November 2009 Erhalt des Diploms
Note: 1.4 (sehr gut)
12/2009- 01/2014 **Promotion**, *im Fachbereich Quantenfeldtheorie*, am Theoretisch-Physikalisches Institut.
Betreuer: Prof. Dr. Holger Gies
Thema: Quantenkorrelationen in starken Feldern
13. Mai 2014 Tag der Disputation
Note: Magna cum Laude

Wehrdienst

07/2003 - 04/2004 **Grundwehrdienst**, *beim 3. Fernmeldebataillon 210*, in Ulm.
Grundausbildung in Münsingen

Schulischer Werdegang

09/1991 - 06/1995 **Grundschule**, „*Schulstraße 7*“, in Altenburg.
09/1995 - 06/1996 **Regelschule**, „*Mäderschule*“, in Altenburg.
09/1996 - 06/2003 **Gymnasium**, „*Lerchenberggymnasium*“, in Altenburg.
27. Juni 2003 Erreichen der Allgemeinen Hochschulreife
Note: 2.2

Praktika / Berufserfahrung

- 04/2004 - 07/2004 Beschäftigung bei der „Druckfarbenfabrik Gebr. Schmidt“ in Frankfurt/Main als Aushilfskraft im Bereich Produktionssicherheit
- 07/2004 - 10/2004 Beschäftigung bei „Altenburger Brauerei GmbH“ in Altenburg als Produktionsarbeiter
- 08/2007 - 10/2007 **Praktikum**, bei „Schott AG“, in Jena.
- Optische Messungen an Quarzgläsern und CaF₂ Kristallen
 - Bestimmung von optischen Eigenschaften der Absorption, Fluoreszenz und laserinduzierte Absorption
 - Routinearbeit im Labor
 - Erlangen von grundlegenden Kenntnissen des physikalischen und des applikativen Hintergrundes
- 02/2008 - 04/2008 **Praktikum**, bei „AMD Saxony“, in Dresden.
- Optimierung der Verfahren zur automatisierten Messung von Defekten und Strukturen auf Wafern
 - Datenauswertung
 - Durchführung von Grundlagenexperimenten zur Abhängigkeit der Ramanstreuung von der Lichtpolarisation an Silizium-Teststrukturen

Sprachkenntnisse

Englisch **Arbeitssprache**
Spanisch **Sprachniveau B**

Universitätssprachkurs

EDV - Kenntnisse

- weitreichende Kenntnisse in der Programmierung mit C/C++ und Anwendung im Bereich Multicore-Optimierung
- Grundkenntnisse in der Programmierung mit Fortran
- Kenntnisse in Programmierung mit C#, HTML, Latex
- Kenntnisse über den Umgang mit Linux-, Windows-, und Macsystemen
- Kenntnisse über MS-Office, Open Office, Matlab, Mathematica, Origin